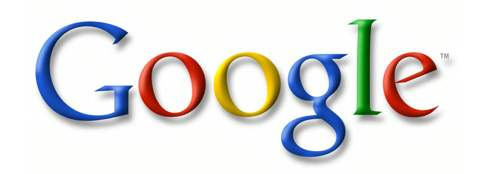
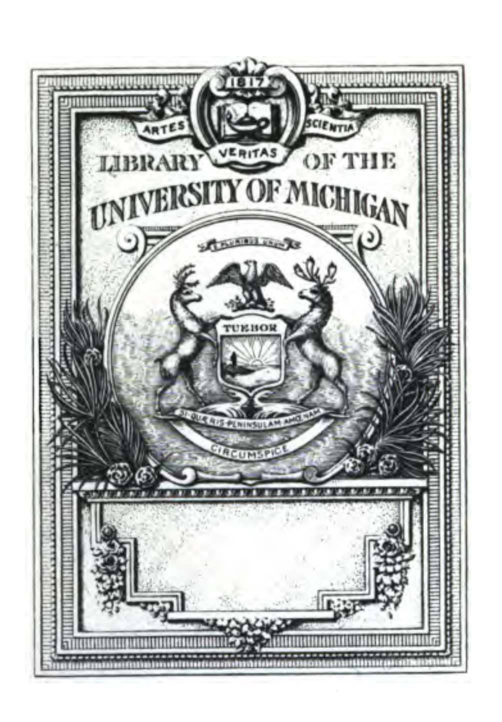



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

USAGE DU COMPAS DE PROPORTION,

USAGE
DU COMPAS
DE PROPORTION,

USAGE
DU COMPAS
DE PROPORTION,

SUIVI D'UN TRAITÉ

DE LA DIVISION
DES CHAMPS;

Ouvrage revu, corrigé et entièrement refondu par J. G. GARNIER, chef de la division géométrique du cadastre *de la République*.

A PARIS,

Rue de Thionville, n°. 116,

Chez FIRMIN DIDOT, Libraire pour les Mathématiques et l'Architecture.

AN IIe DE LA RÉPUBLIQUE.

M. DCC. XCIV.

AVERTISSEMENT.

PARMI les nombreux ouvrages d'Ozanam il n'en est aucun qui soit aussi généralement couru que celui qui a pour titre : *Usage du compas de proportion.* Avant cet auteur, don Henrion étoit encore le seul qui eût écrit sur cet instrument; mais outre que son traité est extrêmement rare, il est plus qu'insuffisant aujourd'hui que le compas de proportion a reçu, entre les mains des Anglois, des additions intéressantes. A cet égard on en peut dire autant de celui d'Ozanam, qui ne differe du premier que par les nombreuses applications qu'il renferme; car il n'a point ajouté aux lignes déja trouvées, ni perfectionné la construction de ces lignes : encore l'ouvrage qu'on connoît aujourd'hui sous son nom n'est-il plus de lui, ce qui fait présumer qu'il n'aura fait que

raccommoder celui de don Henrion. L'Usage du compas qui paroît aujourd'hui est donc, au moins, une troisieme façon de l'original. La premiere partie est augmentée de la construction et de l'usage de plusieurs lignes (*), en sorte que l'instrument dont je parle est la réunion des compas de

(*) Le citoyen Lalande, dans un ouvrage qui a pour titre, *Abrégé de Navigation, historique, théorique et pratique*, 1793, a donné la solution de plusieurs problêmes de navigation au moyen du compas de proportion : il parle encore de plusieurs autres lignes qu'il seroit très avantageux de tracer sur cet instrument. Malheureusement l'impression de mon ouvrage étoit presque achevée lorsque le sien a paru; j'en aurois tiré un grand parti pour le chap. X, j'étois même décidé à faire une addition à ce chapitre, lorsque je réfléchis que les navigateurs ou ceux qui étudient la navigation étant les seuls qui s'y arrêteroient, il vaudroit encore mieux qu'ils consultassent l'ouvrage que je viens de citer.

proportion anglois et françois, qui n'ont de commun que les lignes des polygones et des cordes. On s'est surtout attaché à mettre ceux qui doivent faire usage de cet instrument en état de le construire eux-mêmes avec toute la précision desirable, qualité sans laquelle il est d'une inutilité absolue. Il paroissoït naturel de placer à la suite de ce traité l'*Usage du compas de perspective*, c'étoit aussi mon dessein; l'ouvrage eût été plus homogene: mais *comme sa vogue étoit due*, en grande partie, au *traité de la Division des champs*, on s'est décidé à lui conserver son ancienne composition; seulement nous avons cru devoir supprimer l'*usage de l'instrument universel*, contre lequel il suffit de citer le nom.

Je me propose, quand j'en aurai le temps, de donner un traité du compas de perspective dont j'ai parlé plus haut: j'ai déja fait traduire de

l'allemand celui de Lambert. Le nom de l'auteur m'assure que le reste du travail se réduira à quelques développements.

USAGE
DU COMPAS
DE PROPORTION.

PREMIERE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

Construction du compas de proportion.

L'INSTRUMENT nommé par les François *compas de proportion*, et *secteur* (1) par les Anglois, est connu depuis très long-temps. Don Henrion, professeur de mathématiques, dans un traité sur l'usage de cet instrument, imprimé en 1616, dit qu'en 1598 il trouva un petit compas de

(1) Ce nom est tiré de la 10e définition du 3e livre d'Euclide.

proportion à pointes qui ne portoit que deux lignes, auxquelles il en ajouta huit autres après avoir retranché les pointes. George Adams, dans un ouvrage imprimé à Londres en 1791, et qui a pour titre, *Essai contenant une description des instruments de mathématiques*, dit, en parlant du secteur, *De tous les instruments de mathématiques inventés pour faciliter l'art du dessin, il n'en est aucun d'un usage aussi étendu ou d'une application aussi générale que le secteur. C'est une échelle universelle réunissant, pour ainsi dire, les angles et les lignes paralleles, la regle et le compas, les seuls moyens qu'emploie la géométrie pour mesurer, soit dans la théorie, soit dans la pratique. Le véritable inventeur de ce précieux instrument n'est pas connu; cependant le mérite de cette invention est tel qu'elle a été réclamée par* GALILÉE, *et disputée par les nations.* Cet instrument paroît être plus en usage chez les Anglois que chez nous; on peut, je crois, en at-

tribuer la cause à l'exactitude de la division, qui est tout dans un compas de proportion.

Nous allons d'abord donner la des- Fig. 1.
cription du compas de proportion des Anglois, autrement appelé secteur. Ce compas est *formé de deux regles de* laiton AB et AC, de six pouces de longueur, de 9 lignes de largeur, et de 1 $\frac{1}{2}$ ligne d'épaisseur. La regle AB porte deux plaques circulaires ou joues qui font corps avec elle : ces joues embrassent une autre plaque circulaire de *même diametre qu'elles et fixée sur le* milieu de l'épaisseur de la regle AC ; ces trois pieces sont traversées d'un axe intérieur autour duquel elles tournent librement. Les parties *apq* et *a'mn* des regles AC et AB sont coupées circulairement dans leur épaisseur pour laisser passage, la premiere aux joues, et la seconde à la piece du milieu.

On voit en *a'cc'* une portion de cercle Fig. 2.
qui est d'une seule piece avec la regle AB, et en *ac'* un petit arc concentrique avec

celui $c'ca'$. Dans la fig. (1) ce petit arc embrasse le premier et glisse sur lui lorsqu'on écarte les regles. La même construction a lieu sur l'autre face. L'épaisseur de ces petites portions de cercle est prise sur ce qui reste de la regle après avoir établi les trois plaques circulaires dont nous avons parlé plus haut ; de plus le diametre de $c'ca$ est très petit, et l'arc $c'a$ n'est que le tiers du premier. L'avantage de cette construction est donc de diminuer de beaucoup le frottement qui rend très difficile l'usage des autres compas : aussi, qu'on tienne verticalement une des regles du secteur, en écartant l'autre, celle-ci tombera ou se rapprochera d'elle-même.

On a ajouté au secteur une regle de métal extrêmement mince, dont une des extrémités entre dans une rainure pratiquée dans l'épaisseur de la regle dans le sens *nn*, où elle est retenue en *f* par un axe autour duquel elle peut tourner; le plus grand angle de cette regle avec celle A B est de 90°, en sorte

que ce compas peut servir d'équerre. Pareillement on a pratiqué dans l'épaisseur de la régle AC une rainure destinée à recevoir l'extrémité *f'*: ainsi lorsqu'étant données deux divisions et leurs distances transversales, on veut prendre la distance transversale de deux autres divisions connues, on commence par faire pénétrer l'extrémité *f'* de *f'f* dans sa rainure, puis poussant ou tirant cette regle en pressant sur l'épaisseur *m'b* jusqu'à ce que les deux premieres divisions soient à la distance donnée, on peut prendre entre les deux pointes d'un compas la distance cherchée des deux autres divisions, sans craindre que l'ouverture ne diminue, puisqu'alors les deux regles AC et AB sont retenues par la troisieme, et celle-ci est assez pressée dans sa rainure pour que l'angle ne change pas. On voit que si la rainure eût été prolongée jusqu'au bout de la regle vers C, on n'eût pu fixer le compas pour les petites distances transversales qu'on auroit eu à prendre vers

les extrémités C et B; c'est pour cela qu'on a coupé transversalement la regle AC jusqu'à un pouce, à-peu-près, du point C, afin de pouvoir ramener AC aussi près qu'on voudra de AB, *ff'* étant à angle droit sur AC.

Les lignes tracées sur les faces du secteur sont,

Sur une des faces,

Fig. 3. 1°. Deux lignes de parties égales, autrement appelées *lignes de lignes*, marquées *lig*.

2°. Deux lignes de cordes, marquées *co*.

3°. Deux lignes de sécantes, marquées *séc*.

4°. Une ligne de polygones, marquée *pol*.

Sur l'autre face,

1°. Deux lignes de sinus, marquées *sin*.

2°. Deux lignes de tangentes, marquées *tang*.

3°. Entre la double ligne des sinus et celle des tangentes se trouve une autre ligne des tangentes marquée *tang*. pour un rayon plus petit. Cette derniere

ligne va de 45 à 75°, et supplée au peu d'étendue de l'autre.

Chaque paire de lignes, celle des polygones exceptée, est placée de maniere à faire un angle égal au centre, quelle que soit l'ouverture du compas, en sorte que la distance des n°. 10 de la ligne des lignes est *égale* à celle des n°. 90 de la ligne des sinus, des n°. 60 de la ligne des cordes, des n°. 45 de la ligne des tangentes.

Outre ces lignes, on en voit d'autres placées parallèlement aux arêtes du secteur, telles que,

Sur une des faces,

1°. Une ligne de pouces.

2°. Une ligne de latitude.

3°. Une ligne des heures.

4°. Une ligne des inclinaisons du méridien ;

Et sur l'autre face,

Trois lignes logarithmiques, une des nombres, une des sinus et une des tangentes. L'usage de ces lignes exige que le secteur soit entièrement ouvert, c'est-

à-dire que les deux regles fassent une seule et même regle droite.

Fig. 4. Le compas de proportion, au nom de *Butterfield*, ne renferme que trois de ces lignes; 1°. celle des lignes marque les parties égales; 2°. celle des cordes; 3°. celle des polygones, et cette derniere est double : mais on y trouve une ligne des plans, une ligne des solides, et parallèlement aux arêtes une ligne du calibre des pieces, une du poids des boulets, et enfin une des métaux.

On pourroit, aux lignes paralleles aux bords du compas ajouter un sous-décuple de la nouvelle unité de mesure, dont la longueur a été fixée à la dix-millionnieme partie du quart du méridien. La possession de cette unité devient indispensable, puisqu'on n'indiquera plus les autres mesures que par leur rapport avec elle, et qu'elle doit leur être substituée. Nous ne donnerons pas ici la formule dont on s'est servi pour la trouver. En représentant par Q le quart du méridien, on a trouvé $\frac{Q}{10000000} = 3^{pi.}\ 0^{po.}\ 11^{li.}, 48.$

Une commission des membres de la convention nationale et de l'académie des sciences réunis au bureau du cadastre a arrêté que cette mesure seroit appelée *metre*.

On voit dans la petite table qui suit les noms et les valeurs de l'unité de mesure et de ses sous-décuples.

NOMS DES MESURES.		VALEURS EXPRIMÉES EN metres.	toises.		
Metre	(10 millionnieme partie du q. du mérid.	1	3pi.	0p.	11l., 48
Décimetre. . .		0, 1	0	3	8, 35
Centimetre . .		0,01	0	0	4, 43
Millimetre. . .		0,001	0	0	0, 44

La valeur de trois décimetres exprimée en parties de la toise sera donc = 11po. 1li., 05; ainsi on pourra placer trois dixiemes de l'unité de mesure sur la longueur totale des deux regles. Pour avoir les

centimetres, on divisera chacune de ces divisions en dix parties égales.

Nous allons donner successivement la construction et l'usage des différentes lignes annoncées plus haut, en commençant par celle des parties égales.

CHAPITRE II.

Définition et construction de la ligne des parties égales.

La ligne des parties égales, appelée aussi *la ligne des lignes*, sert à diviser une ligne donnée en parties égales; à ajouter à une ligne, ou en retrancher tel nombre de parties qu'on voudra; à rapporter un plan sur le papier; à trouver la longueur des côtés d'un plan lorsqu'on connoît celle d'un de ces côtés, comme par exemple le nombre de toises d'une courtine, d'une face, d'un flanc, etc., lorsqu'on a celui d'un des côtés du polygone, ou de la ligne de défense.

La ligne des parties égales contient ordinairement deux cents divisions dans une longueur de six pouces; ainsi chacune d'elles est = o$^{lig.}$, 36: pour la tracer avec toute l'exactitude desirable, on pourra employer le procédé suivant.

Sur une regle de bois BF de sept à Fig. 5.
huit pouces de longueur et de même

largeur qu'une des regles du compas, on collera une bande de papier BD de six pouces de longueur, qu'on divisera en vingt parties égales ; puis, cette regle étant disposée bout à bout avec celle AB, en sorte que les lignes magistrales AB et BD forment une seule ligne droite, on posera une des pointes d'un compas à verge sur le point D, on en écartera l'autre à la distance D*m*, *m* étant le lieu du n°. 200 de la ligne des parties égales ; les deux pointes étant alors fixées, on posera la premiere pointe sur 10, et avec l'autre on tracera un trait dont l'intersection avec AB donnera le n°. 190 ; puis sur 20, et on tracera un second trait qui donnera 180 ; puis sur 30, et on aura 170 ; et ainsi de suite. Ces divisions primitives tracées, il restera à diviser chacune d'elles en dix parties égales, c'est-à-dire AB en deux cents parties. Pour cela on se servira avec avantage du compas à verge avec un micrometre (1). Après

(1) Les compas à verge armés de micrometre ne sont pas généralement connus : M. de Prony a donné,

avoir amené sur zéro le bord opposé à la vis de la boîte qui tient aux brides, on écartera l'autre boîte, en sorte que la distance des deux pointes soit égale à 10,190; puis posant une de ces pointes sur 10, l'autre tombant alors sur 190, on fera faire à l'index une révolution entiere, c'est-à-dire vingt-cinq divisions, et 11 divisions, et la pointe qui étoit d'abord sur 190 aura marché vers B de $0^l,36$, ou bien de la dixieme partie de 190 *m*, et on tracera un trait; la premiere pointe restant toujours sur 10, on fera encore parcourir à l'index, dans le même sens, trente-six autres divisions, et l'autre pointe avancera vers B de

---

dans le premier vol. de son Architecture hydraulique, un dessin de la tête de cet instrument, d'après lequel on en concevra parfaitement le méchanisme. Il ne sera pas inutile de rapporter ici la description qu'en donne l'auteur dans une note : « On voit que la tête de la vis « porte un index dont l'extrémité décrit un cercle pen- « dant que la vis fait une révolution; le cercle que dé- « crit l'extrémité de l'index est divisé en parties égales ; « et chacune de ces parties indique une partie propor-

ol., 36 : en continuant ainsi on divisera 190 m en dix parties égales ; et si on a bien opéré, à la neuvieme opération la pointe mobile tombera sur le point *m*. Avant de passer à la division de 180, 190, on ramenera sur zéro le bord opposé à la vis de la boîte mobile, et on verra si ces pointes sont distantes de 10, 190 : alors on posera la pointe fixe sur le n°. 20 de la regle DB, l'autre pointe tombant sur 180, et on procédera comme nous venons de l'indiquer.

Comme on aura souvent besoin dans le cours de cet ouvrage de réduire un nombre de pouces et lignes en parties de la ligne des lignes, nous avons cru devoir placer ici une table qui offrira ces réductions toutes faites.

« tionnelle de la hauteur du pas de la vis. Ainsi, en « supposant la hauteur du pas de vis de $\frac{1}{4}$ de ligne, « et la division du cercle qui a l'index pour rayon, de « vingt-cinq parties, lorsque l'index aura marché d'une « division, l'écrou et les corps qui lui sont attachés « auront marché de $\frac{1}{100}$ de lig., longueur qui sera ainsi « rendue sensible et qu'il seroit peut-être impossible « d'évaluer directement. »

Pouces.	Lignes.	Valeurs exprimées en parties de la ligne des lignes.	Lignes.	Valeurs exprimées en parties de la ligne des lignes.
6		200,00	8	22,22
5		166,66	7	19,44
4		133,33	6	16,66
3		100,00	5	13,88
2		66,66	4	11,11
1		33,33	3	8,33
0	11	30,54	2	5,55
0	10	27,76	1	2,77
0	9	24,99		

Il auroit été superflu de faire entrer dans cette table la valeur d'un nombre de pouces et de lignes, puisqu'on l'obtient par l'addition de deux nombres.

Ainsi pour avoir en parties de la ligne des lignes la valeur de 2po. 7lig., on fera la somme de 66,66 et 19,44, et on trouvera 2po. 7lig. = 86,10.

Pour avoir les dixiemes des lignes, on ne fera que reculer la virgule d'un chiffre vers la droite dans la valeur du nombre de lignes décuple.

Usage de la ligne des parties égales.

PROBLÊME Ier.

Diviser une ligne donnée en autant de parties qu'on voudra.

Solution.

Soit n le nombre de divisions qu'on veut marquer sur la ligne donnée : on choisira d'abord sur la ligne des parties égales un nombre divisible par n, et ouvrant le compas de proportion de maniere que la distance transversale de ce nombre à son égal soit la ligne à diviser, la distance entre les deux quotients de ce nombre par n sera la division cherchée, c'est-à-dire la ligne qui sera un nombre n de fois dans celle qui est donnée.

Application.

Fig. 6. Soit $n = 5$; alors AB et AC représentant la double ligne des parties égales, on pourra prendre les nombres 200, qui, divisés par 5, donnent 40, et faisant la

distance 200,200 égale à FG, la distance DE de 40 à 40 sera $= \frac{1}{5}$ BG.

Démonstration.

Les deux triangles semblables ABC, ADE, donnent AD : AB :: DE : BC; mais AD $= \frac{1}{5}$ AB; donc DE $= \frac{1}{5}$ BC.

On auroit pu prendre des nombres plus petits que 200, mais alors on eût eu une plus grande ouverture de compas, ce qui est moins commode dans la pratique.

Si la ligne donnée étoit trop longue, on pourroit n'en porter que le tiers, le quart; mais alors il faudroit prendre le triple, le quadruple, etc. de la ligne DE pour avoir la cinquieme partie de la ligne FG.

PROBLÈME II.

Couper une ligne en deux parties qui soient entre elles en raison donnée.

Solution.

Soient *n* et *m* les deux termes de la raison; on ouvrira le compas en sorte que

faire la somme $n+m+q+p+r=s$; puis ouvrant le compas en sorte que la distance transversale des n°. s soit égale à la ligne donnée, on prendra celles entre les n°. n, $n+m$, $n+m+p$, $n+m+p+q$, qu'on portera, à partir de l'origine, sur la ligne à diviser. Les parties de cette ligne ainsi déterminées seront entre elles dans les rapports donnés. On s'en assurera en portant ces segments sur la ligne des parties égales, à partir de l'origine; car si les nombres de ces parties contenues dans chacun forment avec les nombres donnés une suite de rapports égaux, ce sera une preuve que l'opération a été bien faite.

PROBLÈME III.

Connoissant le nombre de parties égales que renferme une ligne, trouver celui des mêmes parties que contient une autre ligne.

Solution.

Fig. 8. Soit n le nombre donné et n' celui

qu'on cherche ; après avoir ouvert le compas de proportion en sorte que la distance des nombres *n* soit égale à la premiere ligne, on cherchera deux divisions de même n°. dont la distance soit égale à la deuxieme, et ce n°. sera la valeur de *n'*, c'est-à-dire le nombre de parties égales cherché.

Application.

Supposons que la ligne FG, côté intérieur d'un polygone fortifié, renferme cent vingt parties, dont chacune soit une toise, et qu'on veuille connoître le *nombre de toises de la demi-gorge* FH ; BAC *étant toujours la* double ligne des parties égales, B, C les lieux des nombres 120 ; ayant fait BC = GF, on trouvera que la ligne FH sera, pour cette ouverture, la distance entre le n°. 26 ; ainsi le côté intérieur étant de cent vingt toises, la demi-gorge FH sera de vingt-six toises.

Démonstration.

Les triangles semblables ABC, ADE, donnent AB : AD : : BC : DE.

Ce qui indique que DE contient autant de parties de BC que AD en contient de AB.

Le même procédé donnera le nombre de toises d'une face, d'un flanc, d'une courtine, etc. correspondant à une longueur donnée du côté intérieur, et réciproquement.

Nous avons vu dans le premier problême ce qu'il y avoit à faire dans le cas où la ligne donnée détermineroit une trop grande ouverture de compas.

On trouvera par le même procédé le nombre de parties de toutes les lignes du périmetre d'un polygone dont un des côtés contient un nombre donné de parties égales; car ayant ouvert le compas de proportion en sorte que cette ligne mesure la distance transversale des n°. qui expriment sa longueur, on placera la longueur de chacune des autres lignes, parallèlement à la premiere, entre deux nombres égaux, et ces nombres seront ceux des parties contenues dans les côtés du périmetre.

PROBLÊME IV.

Connoissant le nombre des parties égales que contient une ligne, en retrancher un nombre quelconque de ces parties.

Solution.

Soit encore donnée la ligne FG de cent vingt toises dont il faille en retrancher vingt-six. Ce problême est l'inverse du précédent : car, dans celui-là, la distance entre les deux numéro étant donnée, il falloit trouver ces numéro; au lieu qu'ici les deux numéro sont donnés, et il ne reste plus qu'à en prendre la distance qu'on retranche ensuite de la ligne FG.

Remarque.

On voit que la ligne des parties égales du compas de proportion peut servir d'échelle à un plan, pourvu que l'on connoisse le nombre de parties que renferme une des lignes de ce plan : on peut donc aussi, à l'aide de cette ligne et des principes précédents, tracer un plan

ou en réduire un dans une proportion donnée.

Problème V.

Trouver, par approximation, une ligne droite égale à une circonférence donnée.

Solution.

Le rapport du diametre à la circonférence étant celui de 100 à 314, ou de 50 à 157, on ouvrira le compas de proportion de maniere que la distance des n°. 100 soit égale au diametre du cercle donné, et celle des n°. 157 donnera la ligne cherchée.

Réciproquement si on vouloit trouver le diametre d'un cercle dont la circonférence seroit égale à une ligne donnée, on feroit la distance des n°. 157 égale à cette ligne, et celle des n°. 50 seroit le diametre cherché.

PROBLÊME VI.

Ouvrir le compas de proportion de maniere que la double ligne des parties égales fasse un angle droit.

Solution.

Soit l'équation

$$x^2 = a^2 + b^2,$$

on aura

$$x^4 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2.$$

Ainsi a et b étant deux nombres pris à volonté, on fera le quarré de chacun d'eux ; leur différence sera le nombre de parties à prendre sur une des lignes des parties égales, à partir du centre, et le double produit de ces deux nombres indiquera celui des parties à prendre sur l'autre ligne ; faisant ensuite la somme de ces quarrés, on aura la distance à laquelle il faudra tenir les extrémités des côtés qu'on vient de déterminer pour que la double ligne des parties égales fasse un angle droit.

On aura soin de choisir pour a et

des nombres tels que la somme de leurs quarrés soit moindre que 200.

Application.

Soient $a=12$, $b=6$; on aura $a^2-b^2=108$, $2ab=144$, et $x^2=180$; ainsi, faisant la distance des n°. 108, 144, égale à 180, la double ligne des parties égales sera ouverte à angle droit.

Solution générale.

Plus généralement soit proposé d'ouvrir le compas de proportion en sorte que la double ligne des parties égales fasse un angle quelconque.

Pour cela, prenant la longueur de la ligne des parties égales pour sinus total, on cherchera, pour ce rayon, le nombre de parties contenues dans le sinus de la moitié de l'angle proposé, et mettant les n°. 100 à cette distance, on aura l'angle cherché.

Démonstration.

Fig. 9. Soient AB et AC la double ligne des parties égales, B et C les lieux des n°. 100, F et G ceux des n°. 100, et BAC

l'angle cherché ; à cause de $AF = \frac{1}{2} AB$, on aura $FG = \frac{1}{2} BC = \sin. \frac{1}{2} BAC$.

PROBLÈME VII.

A trois lignes données trouver une quatrieme proportionnelle.

Solution.

Après avoir étendu deux des lignes données sur la ligne des parties égales, à compter du centre A, on notera les nombres qui répondent aux extrémités, puis ouvrant le compas de proportion en sorte que la distance du premier nombre à son égal soit la troisieme ligne, la distance du deuxieme à son égal donnera la quatrieme proportionnelle cherchée.

Application.

Soient HI, KL, MN, les trois lignes, et BAC la double ligne des parties égales; on portera HI et KL du point A sur AB, et leurs extrémités tombant sur les points D et B supposés correspondre aux nombres 16 et 20, on prendra sur l'autre Fig. 19.

B 2

ligne les points E et C de même nombre; puis ouvrant le compas de proportion en sorte que la distance DE soit égale à la ligne MN, la distance BC donnera la quatrieme proportionnelle cherchée.

La démonstration est celle que nous avons déja donnée plusieurs fois.

Il est évident qu'on peut prendre la troisieme ligne MN pour la seconde KL, et réciproquement, car ce n'est que faire changer de place aux moyens d'une proportion.

Remarque.

Si ces deux premieres lignes sont trop longues, on pourra n'en porter que la moitié, le tiers, le quart, etc., et on obtiendra toujours la même quatrieme proportionnelle : ceçi est fondé sur la propriété qu'a le rapport de ne pas changer en divisant ses deux termes par un même nombre. Par la même raison on pourra encore se servir de la moitié, du tiers, etc., des lignes HI, MN. Si la troisieme ligne déterminoit une trop grande ouverture de

compas, on n'en porteroit qu'une fraction, mais alors il faudroit prendre la quatrieme proportionnelle un nombre de fois indiqué par le dénominateur de cette fraction.

Corollaire.

On peut, au moyen de ce que nous venons de dire, résoudre les problêmes suivants, *A trois figures semblables trouver une quatrieme figure proportionnelle et semblable;* car les rapports entre ces figures étant représentés par ceux entre les quarrés des côtés homologues ou entre ces côtés eux-mêmes, on voit que tout se réduit à trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes données; 2°. *Sur une ligne donnée construire un plan semblable à un autre;* cette construction n'exige encore que la recherche d'une quatrieme proportionnelle. 3°. *Prendre une ligne un certain nombre de fois, par exemple quatre fois:* un produit étant une quatrieme proportion-

nelle à l'unité, au multiplicateur et au multiplicande, on prendra sur la ligne des parties égales deux numéro dont l'un soit le quadruple de l'autre, comme 20 et 80; puis ouvrant le compas de proportion en sorte que la distance du premier de ces nombres à son égal soit la ligne donnée, la distance du second à son égal sera la ligne cherchée. 4°. *Diviser une ligne en un nombre quelconque de parties égales, par exemple en quatre parties :* on a toujours cette proportion, l'unité est au dividende comme le diviseur est au quotient; on déterminera donc l'ouverture du compas en faisant la distance des numéro quadruples égale à la ligne donnée, et alors celle de l'autre numéro à son égal donnera la ligne cherchée. 5°. *A deux lignes données trouver une troisième proportionnelle;* car ce n'est qu'une quatrième proportionnelle à trois lignes, mais dont deux sont égales entre elles. Nous omettons ici plusieurs autres problèmes qui

nécessitent la recherche d'une quatrieme proportionnelle ; il nous suffit d'avoir indiqué ceux qui paroissent en dépendre moins directement.

PROBLÈME VIII.

Deux lignes VL et AB, concourant en un point inaccessible q, *étant données de position avec un point* e, *on propose de tirer par ce point une ligne qui aille concourir au même point* q.

Solution.

Le point e sera donné entre les deux lignes ou hors des lignes.

Premier cas. Par le point *e* donné on menera dans une direction quelconque une ligne qui ira couper les deux autres en *a* et *v*, puis d'un point *b* pris sur AB, à une distance quelconque de *a* (la plus grande sera la meilleure) on tirera une parallele *bl* à *av* ; ceci fait, on voit que tout se réduit à trouver sur *lb* un point *x* tel que la ligne *ex* prolongée aille aboutir au point *q*. Pour cela, ayant ouvert la double ligne des parties égales en sorte Fig. 11.

que la distance des n°. 100 devienne égale à av, on cherchera pour cette ouverture deux numéro identiques dont la distance soit égale à ev : je suppose que les n°. 60 satisfassent à cette condition, on fera 100,100 = lb, et la distance correspondante des n°. 60 portée sur la ligne lb, à partir de l, donnera le point x cherché.

Fig. 12. Second cas. Après avoir fait la même construction que dans le premier cas, on fera 100,100 = ev, et supposant que les numéro 72 soient alors distants de av, on fera 72,72 = lb, et la distance correspondante des numéro 100 portée sur lb, à partir de l, donnera un point x tel que la ligne ex prolongée ira passer par le point q.

Cette opération est fondée sur l'égalité des rapports $\frac{av}{ev}$, $\frac{bl}{lx}$; $\frac{va}{ve}$, $\frac{lb}{lx}$.

Ce problême est d'un grand usage dans plusieurs opérations de la géométrie, et sur-tout dans la perspective ; car on peut considérer VL comme une ligne éva-

nouissante, et les deux autres lignes comme des images sur un tableau, en sorte qu'ayant une image donnée sur un tableau, laquelle tend à un point inaccessible évanouissant, on pourra tracer autant qu'on voudra d'images d'autres lignes tendantes au même point.

PROBLÈME IX.

Construire une échelle dans la proportion de $\frac{1}{25}$, c'est-à-dire qui soit telle que vingt-cinq parties sur le terrain soient représentées par une sur le papier.

Solution.

Si l'échelle à construire doit être en pieds et pouces, on fera la distance des numéro 100 de la ligne des lignes égale à un pouce, alors celle des numéro 48 donnera la longueur du pied pour le plan, et cette longueur portée de A en 1, de 1 en 2, etc. et de 11 en B, divisera AB en une échelle de douze pieds : pour avoir des pouces, on prolongera BA de $Aa = A1$, puis prenant la longueur A 2 Fig. 15.

dont on fera une distance transversale entre les numéro 9, on portera celle des numéro 6 de b vers A, ce qui donnera un point e, puis la même longueur 6,6 de 1 et de e vers a, et on aura les points g et n, qui donneront $Ag=gn=na$. Il ne restera plus qu'à diviser ces lignes en quatre parties égales, ce qui se fera par une double bissection pour chacune.

Démonstration.

Un pouce sur le terrain devant être représenté par $\frac{1}{25}$ pouce sur le papier, si l'on conçoit cette mesure divisée en 25 parties, le pied sur l'échelle renfermera 12 de ces parties; c'est en effet ce que vaut le quatrieme terme de la proportion $100 : 25 :: 48 : x = \frac{1200}{100} = 12$.

PROBLÈME X.

Diviser une ligne donnée en un certain nombre de parties égales.

Premier cas. Le nombre de parties de cette ligne est une puissance de 2.

Solution.

Soit AB à diviser en seize parties égales ; faites A B une distance transversale entre les n°. 10 de la ligne des lignes, et celle des numéro 5 portée de A ou B donnera 8, ou bien partagera A B en deux parties. Prenez A 8 pour la distance transversale entre les numéro 10, et celle des numéro 6 portée de A donnera 4, et de B donnera 12, et AB sera divisée en quatre parties égales aux points 4, 8 et 12. La longueur A 4 posée entre les numéro 10, celle 5,5 portée de A donnera 2, de 4 donnera 6, de 8 donnera 10, et enfin de 12 donnera 14 ; ainsi la ligne donnée sera divisée en huit parties égales. Pour diviser chacune de ces parties en deux, on pourroit faire la distance 10,10 = A 2 et achever la division avec celle des numéro 5 ; mais comme l'ouverture seroit trop petite, nous allons proposer un autre moyen : prenez trois des dernieres parties, ou bien A 6, pour distance des numéro 10, et celle des numéro 5 portée de A Fig. 14.

donnera 3, portée à droite et à gauche de 4 donnera 7 et 1, à droite et à gauche de 8 donnera 11 et 5, à droite et à gauche de 12 donnera 15 et 9, et enfin à gauche de B donnera 13 : on a ainsi une maniere exacte et commode de diviser une ligne en seize parties égales par une bissection continue. D'après ce que nous venons de dire, il sera aisé de couper la ligne donnée en 32, 64, etc. parties égales.

Second cas. Le nombre des parties n'est pas une puissance de 2.

Solution.

Fig. 15. Soit la ligne AB à diviser en quatorze parties égales; faites AB une distance transverse entre les numéro 10, et celle 5,5 portée de A ou B donnera 7; reste à diviser A 7 et B 7 en sept parties égales, ce qu'on peut faire de deux manieres, savoir, en divisant A 7 en 6 et 1, ou en 4 et 3; cette derniere est préférable, parcequ'on peut achever l'opération par deux bissections. Faites 7, 7 = A 7, et la distance 4,4 portée du point A donnera

4, à droite et à gauche de 7 donnera 11 et 3, et à gauche de B donnera 10 : prenez 10,10=A4, et la distance 5,5 portée à gauche et à droite des points 4 et 10 donnera 2, 6, 8 et 12; la même distance, à partir de 3 dans les deux sens, donnera 1 et 5, et de 11 donnera 13 et 9; la ligne AB sera donc divisée en quatorze parties égales.

Remarque.

Ce second cas renferme celui d'un nombre impair de parties, en sorte que, par cette méthode, on peut diviser une ligne en un nombre quelconque de parties égales.

CHAPITRE III.

Définition et construction de la ligne des plans.

La ligne des plans, égale en longueur à celle des parties égales, donne les côtés homologues de soixante-quatre plans semblables, et dont les surfaces sont représentées par la suite des nombres naturels depuis 1 jusqu'à 64. On peut la construire de deux manieres : la premiere consiste à diviser la ligne entiere en un nombre de parties égales que, pour plus de commodité, on choisira telle qu'il soit divisible par $\sqrt{64}=8$; on pourra prendre le nombre 1000 qui remplit cette condition, puis appelant A la surface 64, B celle dont on cherche le côté, que nous désignerons par x, on aura la proportion

$$A : B :: \overline{1000}^2 : x^2,$$

de laquelle on tire

$$x=\frac{1000}{\sqrt{A}}\sqrt{B}=\frac{1000}{8}\sqrt{B}.$$

substituant pour B les nombres 1, 2, 3, 4..... 63, on aura, en parties de A, les côtés homologues des soixante-trois plans; après quoi on étendra toutes ces longueurs sur la ligne des plans, à compter du centre A, et à l'extrémité de chacune on écrira le numéro du plan dont elle est le côté.

En effectuant la division, l'équation précédente devient

$$x = 125\sqrt{B};$$

et si on fait $B = n$, n étant le numéro du plan, on a

$$x = 125\sqrt{n}.$$

D'où l'on voit que *pour avoir le côté d'un plan, il faut au logarithme de* 125 *ajouter le logarithme de la moitié du numéro de ce plan, puis porter sur la ligne des plans, à partir du centre, le nombre de divisions indiqué par celui qui répond à ce logarithme.*

Qu'on veuille, par exemple, trouver le côté du quatrieme plan; on a pour ce cas $n = 4$;

$$\log. \sqrt{4} = \tfrac{1}{2} \log. 4 = 0,3010300$$
$$\log. 125 = 2,0969100$$
$$2,3979400 = \log. 250.$$

C'est ainsi que nous avons calculé la table suivante, mais dans la supposition de a=200, afin qu'on puisse prendre les valeurs trouvées pour x sur la ligne des parties égales, qui devient alors l'échelle convenable.

Table des côtés homologues de 64 plans semblables calculés dans la supposition que le côté du 64e renferme deux cents parties.

Numéro des plans.	Longueur des côtés.	Numéro des plans.	Longueur des côtés.	Numéro des plans.	Longueur des côtés.	Numéro des plans.	Longueur des côtés.
1	25,0	17	103,0	33	143,8	49	175,0
2	35,4	18	106,0	34	145,8	50	176,8
3	43,2	19	109,0	35	147,8	51	178,4
4	50,0	20	111,8	36	150,0	52	180,2
5	55,8	21	114,6	37	152,0	53	182,0
6	61,2	22	117,2	38	154,0	54	183,6
7	66,0	23	119,8	39	156,0	55	185,4
8	70,6	24	122,4	40	158,0	56	187,0
9	75,0	25	125,0	41	160,0	57	188,8
10	79,0	26	127,4	42	162,0	58	190,4
11	82,8	27	130,0	43	163,8	59	192,0
12	86,6	28	132,2	44	165,8	60	193,6
13	90,0	29	134,6	45	167,8	61	195,2
14	93,4	30	136,8	46	169,6	62	196,8
15	96,8	31	139,2	47	171,4	63	199,4
16	100,0	32	141,4	48	173,2	64	200,0

Seconde construction.

Appelant toujours A la surface dont on a le côté, B celle dont le côté est inconnu, a et x ces côtés, on a, comme plus haut,

$$A : B :: a^2 : x^2,$$

d'où ou tire

$$x^2 = \frac{B}{A} a^2.$$

Fig. 16. Pour construire cette équation, sur une ligne AB de même longueur que celle des plans on élévera une perpendiculaire $AC = \frac{AB}{8}$, c'est-à-dire égale au côté du plan 1; puis prenant AN = AC, on aura CN égale au côté du plan 2; le côté du plan 3 sera l'hypoténuse du triangle AOC dont le côté AO = CN. *En général, le côté d'un plan dont le numéro est* n *sera l'hypoténuse d'un triangle qui aura* $\frac{AB}{8}$ *pour un des côtés de l'angle droit, et pour l'autre celui du plan dont le numéro est* n — 1, *ou bien l'hypoténuse du triangle précédent.*

Démonstration.

Le triangle ACN donne

$$\overline{CN}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AN}^2 = \tfrac{2}{64}\,\overline{AB}^2$$

et $CN = x = \frac{\sqrt{2}}{8}\,AB$;

valeur de x correspondante au plan 2.

Dans le triangle AOC, on a

$$\overline{CO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AC}^2 = \tfrac{2}{64}\,\overline{AB}^2 + \tfrac{1}{64}\,\overline{AB}^2$$
$$= \tfrac{3}{64}\,\overline{AB}^2$$

et $CO = x = \frac{\sqrt{3}}{8}\,AB$.

Ces côtés une fois trouvés, on achevera l'opération comme nous l'avons enseigné plus haut.

Remarque.

Pour déterminer un point quelconque Q, on se sert de la ligne CP qui a été trouvée au moyen de $AO = CN$; d'où l'on voit que l'erreur sur la longueur de AQ se compose de toutes celles qui ont eu lieu dans la détermination des lignes précédentes : il sera donc nécessaire d'avoir sur AB des points de vérification, c'est-à-dire des points comme O, P, Q, qu'on ait trouvés par une autre méthode;

car s'ils coïncident, c'est une preuve que l'opération est bonne. Voici une maniere de se les procurer : on prendra, avec un compas, une distance quelconque NA, puis une des pointes restant sur N, on ramenera l'autre vers B; et si la division est bonne, cette pointe tombera sur un numéro quadruple. En effet, soit B la surface de AN, et B' celle de 2 AN, on aura

$$B : B' :: \overline{AN}^2 : 4\overline{AN}^2,$$

d'où, $B' = 4B$.

La deuxieme construction, par sa simplicité et la facilité de l'exécution, mérite la préférence sur la premiere,

Usage de la ligne des plans.

PROBLÈME Ier.

Construire un triangle semblable à un autre et qui soit avec lui dans un rapport donné.

Solution.

Soit $m : n$ le rapport du triangle donné

au triangle à construire ; on ouvrira le compas de proportion en sorte que la distance transversale des numéro *m*, sur la double ligne des plans, soit égale à un des côtés du triangle, et alors celle des numéro *n* donnera le côté homologue du triangle à construire. Faisant ensuite la premiere distance égale à un autre côté, la distance correspondante des numéro *n* sera un second côté homologue, et ainsi pour le troisieme côté.

Application.

Soient $m = 3$, $n = 4$, et FGH le triangle donné ; BAC étant la double ligne des plans, B et C les lieux des numéro 4, D et E ceux des numéro 3 ; pour trouver les côtés du triangle LIK, que je suppose être celui qu'on cherche, on fera DE successivement $=$ FG, $=$ GH, $=$ FH, ce qui donnera BC $=$ IK, $=$ KL, $=$ LI. Fig. 174

Démonstration.

Les deux triangles semblables ADE, ABC, donnent

DE : BC :: AD : AB

et $\overline{DE}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2$.

Mais, d'après la construction de la ligne des plans, le rapport de $\overline{AD}$ à $\overline{AB}$ est celui de deux figures semblables qui seront entre elles dans le rapport de 3 à 4; donc le triangle donné et le triangle construit sont aussi semblables et dans le rapport de 3 à 4.

Remarque.

Si les deux termes de la raison étoient trop petits, on les multiplieroit par un même nombre, qu'on auroit soin de choisir tel que les produits n'excédassent pas 64; au contraire on les diviseroit par un même nombre, s'ils étoient trop grands.

Dans les cas où les deux termes de la raison seroient des quarrés parfaits, on construiroit au moyen de la ligne des parties égales; pour cela, extrayant d'abord les racines que j'appelle m', n'; on feroit, sur la ligne des parties égales, la distance $m'm' = FG$, et celle $n'n'$ seroit $= IK$.

Nous avons dit plus haut ce qu'il y auroit à faire si les deux termes étoient

des fractions non réduites au même dénominateur.

Corollaire.

En suivant ce procédé, on résoudra le même problême sur des cercles et des polygones, en se servant pour les premiers du diametre, et décomposant les seconds en triangles; car si on vouloit opérer immédiatement sur les côtés, on seroit obligé de se servir du rapporteur, tandis qu'ici nous supposons qu'on n'emploie que le compas de proportion.

Dans le cas de $n = a m$, la surface à construire sera un multiple de la proposée, et on aura résolu le problême de la multiplication des surfaces.

PROBLÊME II.

Deux plans semblables étant donnés, trouver leur rapport.

Solution.

Prenant un des côtés de celui qu'on voudra des deux plans et une ouverture arbitraire du compas de proportion, on

placera ce côté de maniere que ses deux extrémités tombent sur deux numéro identiques de la double ligne des plans, puis plaçant transversalement le côté homologue, suivant la même condition, le rapport cherché sera donné par celui des numéro correspondants à ces côtés.

Application.

Reprenons la figure précédente, et supposons qu'on demande le rapport des triangles FGH, IKL; BAC étant la double ligne des plans, D et E les lieux des numéro 9, on fera DE = FG, ce qui donnera une ouverture de compas telle que l'homologue IK deviendra la distance des numéro 12; d'où on conclura que les deux plans sont entre eux dans le rapport de 9 à 12, ou dans celui de 3 à 4, comme nous l'avions proposé dans le probléme précédent. Il est clair que la démonstration doit être l'inverse de celle que nous avons donnée plus haut.

Remarque.

Si, après avoir placé le côté du plus petit des deux plans, l'ouverture étoit telle qu'elle

qu'elle ne pût contenir le côté du plus grand, alors il faudroit rapprocher le plus petit du centre du compas, ce qui augmenteroit l'ouverture, ou bien on opéreroit sur des fractions égales de ces côtés.

On pourra encore, au lieu de placer les côtés transversalement, les porter du centre A sur la ligne des plans, et alors les numéro correspondants aux extrémités seront les deux termes de la raison cherchée. En effet, on peut supposer que la ligne des plans soit le côté d'un triangle semblable à ceux dont il est ici question, et de plus l'homologue de ceux FG et IK; et alors ces côtés et les rapports des triangles auxquels ils appartiennent, seront dans la suite de ceux qu'on voit sur cette ligne.

Autre solution.

On peut encore résoudre ce problème au moyen de la ligne des parties égales; pour cela, faisant $FG = a$, $IK = b$, $FH = c$, on construira les quatriemes termes des deux proportions suivantes,

$$c : b :: b : x' = \frac{bb}{c} ; c : a :: a : x = \frac{aa}{c},$$

comme nous l'avons enseigné dans le chapitre précédent, puis portant la valeur de x' et x sur la ligne des parties égales, à compter du centre A, le rapport cherché sera celui des nombres correspondants aux extrémités de ces lignes, puisqu'on a $\frac{x}{x'} = \frac{a^2}{b^2}$.

On trouvera par le même procédé le rapport de deux polygones semblables et celui de deux cercles.

PROBLÊME III.

Ouvrir le compas de proportion en sorte que la double ligne des plans fasse un angle droit.

Solution.

m étant un numéro quelconque pair de la ligne des plans, on fera la distance de $\frac{m}{2}$ à $\frac{m}{2}$ égale à Am, et le problême sera résolu.

Démonstration.

Soient BAC la double ligne des plans,

B le lieu de m que je suppose être $= 32$, Fig. 18.
D et E ceux de $\frac{m}{2} = 16$; la construction de la ligne des plans donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{DE}^2 : \overline{AD}^2 :: 32 : 16;$$

d'où l'on tire

$$\overline{DE}^2 = 2\,\overline{AD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2;$$

donc le triangle DAE est rectangle en A.

Il suit de là que si le côté AB = DE est plus grand que le double de AD l'angle A sera obtus, et qu'il sera aigu si le contraire a lieu.

PROBLÈME IV.

Deux plans semblables étant donnés, en construire un qui leur soit égal en surface et semblable.

Solution.

Après avoir porté, à partir du centre, sur l'une et l'autre ligne des plans, deux côtés homologues des deux plans, on ouvrira cette double ligne à angle

droit, et la distance transversale des extrémités de ces côtés sera l'homologue d'un plan égal en surface aux deux premiers.

Application.

Soient DE, FG, des côtés homologues de deux plans semblables, et BAC la double ligne des plans; après avoir pris AC
Fig. 19. = FG et AB = DE, on fera l'angle BAC de 90, et alors la distance BC sera le côté homologue cherché.

Démonstration.

Soient A la surface du plan qui a DE $= a$ pour côté, B celle du plan auquel appartient FG $= b$, et S la surface = A + B dont je désigne le côté homologue par x; on doit avoir les deux proportions

$$A : S :: a^2 : x^2$$

$$\text{et } A : B :: a^2 : b^2;$$

on tire de la derniere

$$A : A + B\,(S) :: a^2 : a^2 + b^2,$$

et conséquemment

$$x^2 = a^2 + b^2 = BC^2.$$

Remarque.

Si la longueur des côtés DE et FG

surpassoit celle de la ligne des plans, alors on n'emploieroit que la moitié, le tiers, etc. de ces côtés, observant de corriger la valeur trouvée pour x, en sorte qu'elle satisfasse à l'équation que nous venons de trouver.

Autre solution.

On pourra encore résoudre ce problême de la maniere suivante qui sauve la nécessité d'ouvrir à angle droit la double ligne des plans. Prenant, à volonté, sur l'une et l'autre ligne des plans un numéro m, on fera la distance $m\,m$ $=$ D E : puis l'ouverture de compas étant ainsi déterminée, on portera le côté F G transversalement en sorte que ses deux extrémités correspondent à un même numéro n, et la distance des numéro $m + n$ sera le côté d'un plan égal en surface aux deux plans donnés.

Dèmonstration.

Soient BAC la double ligne des plans, Fig. 20. D et E les lieux des numéro m, F et G ceux des numéro n, et enfin B et C

plans, on a $\overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 :: 45 : 20$,

donc $\overline{BC}^2\ (\overline{HI}^2) : \overline{DE}^2 :: 45 : 20 :: HI : FG$; et multipliant les deux termes du dernier rapport par HI, on trouvera

$$\overline{HI}^2 : \overline{DE}^2 :: \overline{HI}^2 : FG \cdot HI,$$

d'où l'on tire

$$\overline{DE}^2 = FG \cdot HI.$$

Donc la ligne DE, ainsi déterminée, est moyenne proportionnelle entre FG et HI.

Remarque.

Ce problême peut encore être résolu, mais plus laborieusement, au moyen de la ligne des parties égales.

Corollaire.

Comme la réduction d'un cercle, d'un triangle, et conséquemment d'une figure quelconque, en un quarré, dépend de la recherche d'une moyenne proportionnelle entre la circonférence et le rayon, et entre des bases et des moitiés de hauteurs, on voit que le procédé que nous venons de décrire donne encore la solution de cette classe de problêmes.

Il servira encore pour résoudre celui-ci : *Deux plans semblables étant donnés, trouver un troisième plan semblable et égal à leur différence.* En effet, soient a, b et x les côtés homologues des trois plans, A la surface du premier, B celle du second, D celle du troisième ; on doit avoir

$$D = A - B, \text{ d'où } A = D + B :$$

mais nous avons vu, page 52, qu'on exprimoit la même condition par l'équation suivante

$$a^2 = x^2 + b^2.$$

de laquelle on tire

$$x^2 = a^2 - b^2 \text{ ou } x^2 = (a+b)\,(a-b);$$

d'où l'on voit que le côté x est moyenne proportionnelle entre la somme et la différence des côtés homologues des plans donnés.

PROBLÈME VI.

Deux surfaces quelconques étant données, en construire une qui soit égale à leur somme.

Solution.

On décomposera les surfaces données en triangles, puis entre la base de chaque triangle et la moitié de sa hauteur on cherchera une moyenne proportionnelle qui sera le côté d'un quarré égal en surface à ce triangle; ceci fait, on n'aura plus qu'à construire, comme nous l'avons enseigné, un quarré qui soit égal à la surface de tous les quarrés trouvés, et conséquemment à celles de deux plans donnés. On est donc en état d'ajouter un nombre quelconque de plans semblables et non semblables.

PROBLÊME VII.

Un cercle étant donné, trouver un quarré qui lui soit égal en surface.

Solution.

Divisez le diametre du cercle donné en quatorze parties égales, au moyen de la ligne des lignes, et 12,4 de ces parties seront le côté du quarré cherché.

Démonstration.

Soient S la surface du cercle, D son diametre, S′ la surface du quarré, et x le côté cherché ; on a

$$S : S' :: \tfrac{11}{14} D^2 : x^2 :$$

mais, par la supposition, $S = S'$,
donc $\frac{11}{14} D^2 = x x$;
et faisant $D = 14$,

$$11 \cdot 14 = x x, \text{ donc } x = 12,4.$$

Problème VIII.

Un quarré étant donné, trouver le diametre d'un cercle qui lui soit égal en surface.

Solution.

Divisez par la ligne des lignes le côté du quarré en onze parties égales, ce côté prolongé de 1,4 de ces parties sera le diametre du cercle cherché.

PROBLÈME IX.

Trouver le côté d'un quarré dont la surface soit égale à celle d'une ellipse.

Solution.

Cherchez une moyenne proportionnelle entre le grand et le petit axe de l'ellipse, que vous diviserez en quatorze parties égales ; 12,4 de ces parties seront le côté du quarré cherché.

Démonstration.

La surface de l'ellipse est moyenne proportionnelle entre les surfaces des cercles décrits sur le grand et petit axe, et conséquemment égale à celle d'un cercle dont le diametre est aussi moyenne proportionnelle entre ces mêmes axes ; le problême se réduit donc à trouver un quarré dont la surface soit égale à celle de ce cercle.

PROBLÈME X.

Décrire une ellipse dont les diametres soient dans un rapport quelconque, et dont la surface soit égale à celle d'un quarré donné.

Solution.

Supposons que le rapport du grand axe au petit soit celui de 2 à 1; après avoir divisé le côté du quarré donné en onze parties égales, on fera la proportion

$$2 : 1 :: 11 + 14\ (154) : x = 72;$$

et $(72)^2$ de ces parties seront la longueur du petit axe, et le double donnera le grand axe.

Nous donnerons à la fin du chap. VII la maniere de construire l'ellipse.

CHAPITRE IV.

Définition de la ligne des polygones.

CETTE ligne donne les côtés de neuf polygones inscrits au même cercle.

Construction.

Le quarré étant de tous les polygones celui qui a le moins de côtés et conséquemment aussi celui dont les côtés sont les plus grands, on a calculé ceux des autres polygones pour un cercle dans lequel le côté du quarré inscrit seroit de six pouces, c'est-à-dire de même longueur que la ligne des polygones. Faisant ce côté du quarré = 1000, on trouvera le rayon du cercle circonscrit en calculant le quatrieme terme de la proportion

Sin. total : côté du quarré (1000) : :
Sin. 45° : R = 707.

Connoissant le côté de l'exagone, on trouvera celui de tel autre polygone

qu'on voudra, par l'analogie suivante :
Le sinus total
est au double du côté de l'exagone
comme le sinus de la moitié de l'angle
au centre :
est au côté du polygone qu'on cherche.

C'est de cette maniere que nous avons calculé la table suivante qui renferme les côtés des polygones, mais calculés dans la supposition que celui du quarré soit de deux cents parties, afin qu'on puisse prendre immédiatement sur la *ligne des lignes* le nombre de parties trouvé pour le côté des autres polygones.

POLYGONES.	LONGUEURS DES CÔTÉS.
Quarré	200
Pentagone. . . .	166,2
Exagone	141,4
Eptagone	122,6
Octogone	108,0
Ennéagone . . .	96,8
Décagone	87,4
Endécagone . . .	79,6
Dodécagone . . .	73,2

Usage de la ligne des polygones.

PROBLÈME Ier.

Décrire un polygone régulier dans un cercle donné.

Solution.

Ouvrez le compas de proportion en sorte que la distance des numéro 6 de la ligne des polygones soit égale au rayon du cercle donné, alors la distance des numéro du plan dont on cherche le côté donnera la longueur de ce côté.

Application.

Inscrire un eptagone régulier dans le cercle FGH.

Soient BAD la double ligne des polygones, B et C les lieux des numéro 6, D et E ceux des numéro 7; on prendra BC = GO, ce qui déterminera la distance DE égale au côté de l'eptagone inscriptible au cercle FGH. Fig. 22.

Démonstration.

AD est le côté de l'eptagone dans un cercle qui a AB pour rayon, et les trian-

gles ABC, ADE, sont semblables; donc DE sera le côté d'un polygone du même nombre de côtés dans un cercle décrit du rayon BC.

On voit qu'en faisant la distance BC égale à la moitié, au tiers, au quart, du rayon donné, celle DE sera la même fraction du côté cherché; ainsi pour avoir ce côté, il faudra multiplier celle-ci par 2, 3, 4, etc.; c'est ce qu'on fait lorsque le rayon du cercle donné est très grand.

PROBLÈME II.

Construire un polygone régulier sur une ligne donnée.

Solution.

Ce problême est l'inverse de celui que nous venons de résoudre: en effet dans celui-ci on donnoit le rayon du cercle, et il falloit trouver le côté du polygone; ici c'est le côté du polygone qui est donné, et le rayon du cercle est l'inconnue: ainsi au lieu de déterminer l'ouverture

du compas par le rayon pour avoir la longueur du côté, on la déterminera par le côté pour en déduire la longueur du rayon.

Application.

Supposons que sur la ligne donnée H G il faille construire un eptagone régulier : soient BAD la double ligne des polygones, D et E les lieux des numéro 7; B et C ceux des numéro 6; on fera DE = FG, et on aura BC égal au rayon cherché. Fig. 22.

Quand le nombre des côtés du polygone surpasse 12, on ne peut plus se servir de la ligne des polygones; mais alors on a recours à celle des cordes, parceque le probléme revient à celui-ci : *sur chaque extrémité d'une ligne faire un angle donné, lequel doit toujours être égal à $\frac{180}{2}$ moins la moitié de l'angle au centre;* car alors l'intersection des deux côtés de cet angle donne le centre du cercle, et un de ces côtés en est le rayon.

PROBLÈME III.

F G *étant le côté d'un eptagone, trouver le nombre de côtés d'un polygone construit sur M N.*

Solution.

Après avoir fait la distance des numéro 7 égale à FG, on placera MN parallèlement à ce côté, en sorte que ses extrémités tombent sur deux numéro identiques, lesquels donneront le nombre de côtés qu'on cherche. On suppose, bien entendu, que les deux polygones soient inscrits au même cercle.

PROBLÈME IV.

Couper une ligne donnée en moyenne et extrême raison.

Solution.

On démontre en géométrie que si on coupe un cercle en moyenne et extrême raison, le plus grand segment est le côté d'un décagone inscrit au même cercle; ainsi tout se réduit à trouver le côté de

ce décagone, en supposant le rayon égal à la ligne donnée.

Remarque.

Lorsqu'on connoîtra l'usage de la ligne des cordes, on aura encore un moyen de trouver le plus grand des deux segments, qui, d'après ce que nous avons dit, est égal à la corde de 36°.

En résolvant ce problême, on construit celle des deux racines de l'équation

$$xx + ax - aa = o$$

dans laquelle le radical est affecté du signe plus, c'est-à-dire la racine qui exprime le grand segment d'une ligne coupée suivant la condition énoncée plus haut; et comme en retranchant le grand segment de la ligne entière on a le petit, on construit aussi celle des deux racines de l'équation

$$xx - 3ax + aa = o$$

dans laquelle le radical est affecté du signe moins.

PROBLÈME V.

Sur une base donnée construire un triangle isocelle, avec cette condition que l'angle à la base soit double de l'angle au sommet.

Solution.

Le triangle devant être isoscele, les angles à la base sont égaux entre eux; et comme chacun doit être double de l'angle au sommet, on aura, en désignant ce dernier par x,

$$x + 4x = 180^o \text{ et } x = \frac{180}{5} = 36^o.$$

Ainsi la base donnée devient le côté d'un décagone dans un cercle qui auroit pour rayon un des deux autres côtés du triangle.

On peut proposer ce problême plus généralement en disant : *Sur une ligne donnée construire un triangle isoscele, dans lequel l'angle à la base soit dans un rapport quelconque* n *avec l'angle au sommet.* Pour exprimer cette condition, on a l'équation

$$x + 4nx = 180^o, \text{ d'où } x = \frac{180}{5n}:$$

et prenant pour n les fractions $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{7}{5}$ - - - $\frac{12}{5}$; la base donnée deviendra successivement le côté d'un quarré, d'un décagone, d'un dodécagone, etc. Ainsi pour toutes ces valeurs de n, on construira le triangle au moyen de la ligne des polygones, faisant de la base donnée une distance transversale entre les n°. des polygones dont elle est le côté, et prenant la distance des numéro 6, correspondante à cette ouverture, avec laquelle on décrira, des deux extrémités de la base, deux arcs de cercle dont l'intersection donnera le sommet du triangle à construire.

PROBLÈME VI.

Ouvrir le compas de proportion en sorte que la double ligne des polygones fasse un angle droit.

Solution.

Ouvrez le compas de proportion en sorte que la distance de 10 à 6 soit égale à celle du centre au numéro 5, ou bien

au côté du pentagone, et l'angle formé par la double ligne des polygones sera droit.

On trouvera la démonstration de cette propriété, page 196 de la nouvelle édition des leçons de géométrie, par M. Mauduit.

Problème VII.

Construire un polygone régulier qui ait une surface donnée.

Solution.

Fig. 23. Supposons que la figure cherchée soit un pentagone dont la surface = 125 pieds; après avoir pris la racine quarrée de $\frac{1}{5}$ de 125 qu'on trouvera = 5, on construira un quarré dont le côté soit de cinq pieds; ensuite, au moyen de la ligne des polygones, on fera un triangle isoscele CGD tel que CD puisse être le côté d'un pentagone régulier inscrit à un cercle qui auroit CG pour rayon; ceci fait, on prolongera la hauteur EG en sorte qu'on ait EF égale au côté du quarré,

quarré, puis menant par le point F ainsi trouvé une parallele FH à GC on cherchera une moyenne proportionnelle entre EH et EF, laquelle sera le demi-côté du pentagone cherché; le reste de la construction se fera ainsi qu'on l'a prescrit ci-dessus.

Démonstration.

Le triangle EFH donne la proportion

$$EH : EF :: \sin. F : \sin. H,$$

de laquelle on tire

$$EH = 5^{pi.} \frac{\sin. 36^\circ}{\sin. 54^\circ} = 5^{pi.} \times 0{,}726 = 3^{pi.} 63;$$

d'un autre côté on a

$$EH : x :: x : EF,$$

x étant le demi-côté du pentagone; donc

$$xx = 5 \times 3{,}63 = 18{,}15, \; x = 4^{pi.}, 26,$$

et le périmetre $= 5 \times 2x = 42{,}6$. L'apotheme du pentagone est

$$= x \frac{\sin. 54^\circ}{\sin. 36^\circ} = 5^{pi.}, 8634;$$

donc surface du pentagone

$$= \frac{5^{pi.}, 8634}{2} \times 42{,}6 = 124{,}88,$$

valeur qui ne differe de la véritable que de 0,12.

Nous croyons devoir nous borner à ces sept problêmes, parceque tous ceux qu'on pourroit encore proposer seront résolus lorsque nous traiterons de l'usage de la ligne des cordes.

CHAPITRE V.

Définition et construction de la ligne des solides.

Définition.

La ligne des solides, égale en longueur à celle des parties égales, donne les côtés homologues de 64 solides semblables, dont les volumes sont représentés par les nombres 1, 2, 3, 4 . . . 64.

Construction.

Cette ligne peut, comme celle des plans, être construite de deux manieres différentes : 1°. en calculant les côtés homologues en parties du côté du 64e solide, et portant ces valeurs à partir du centre; 2°. en déterminant ces côtés par des opérations graphiques.

Soient $\frac{A}{B}$ le rapport entre le 64e solide et celui dont on cherche le côté, a=1000

le côté du premier solide, et x celui du second; on doit avoir

$$A : B :: a^3 : x^3,$$

d'où on tire $x^3 = \frac{B}{A} \cdot a^3$

et $x = \frac{a}{4} \sqrt[3]{B} = 250 \sqrt[3]{B}$.

Ainsi pour trouver les valeurs de x pour toutes celles de B, on cherchera les logarithmes des nombres 1, 2, 3, 4 . . . 63, et ajoutant leurs tiers au logarithme de 250, les nombres correspondants à cette somme seront ceux des parties de a contenues dans ces côtés. Qu'on veuille, par exemple, trouver le côté du quatrieme solide; on aura B=4 et

$$\log. 4 = 0{,}6020600$$

$$\log. \sqrt[3]{4} = \tfrac{1}{3} \log. 4 = 0{,}2006867$$
$$\log. 250 = 2{,}3979400$$

$$2{,}5986266 = \log. 396{,}85.$$

C'est ainsi qu'on a calculé la table suivante, mais en supposant $a = 200$, afin qu'on puisse prendre les valeurs trouvées pour x sur la ligne des parties

égales, qui devient alors l'échelle convenable.

TABLE des côtés homologues de 64 solides semblables calculés dans la supposition que le côté du 64e renferme 200 parties.

Numéro des solides.	Longueur des côtés.	Numéro des solides.	Longueur des côtés.	Numéro des solides.	Longueur des côtés.	Numéro des solides.	Longueur des côtés.
1	50,0	17	128,6	33	160,4	49	182,8
2	63,0	18	131,0	34	162,0	50	184,2
3	72,0	19	133,4	35	163,6	51	185,4
4	79,4	20	135,6	36	165,0	52	186,6
5	85,4	21	137,8	37	166,6	53	187,8
6	90,8	22	140,0	38	168,0	54	189,0
7	96,6	23	142,2	39	169,6	55	190,2
8	100,0	24	144,2	40	171,0	56	191,2
9	104,0	25	146,2	41	172,4	57	192,4
10	107,6	26	148,0	42	173,8	58	193,4
11	111,2	27	150,[illegible]	43	175,2	59	194,6
12	114,4	28	151,8	44	176,4	60	195,6
13	117,6	29	153,6	45	177,8	61	196,8
14	120,4	30	155,4	46	179,2	62	197,8
15	123,2	31	157,0	47	180,4	63	199,0
16	126,0	32	158,8	48	181,6	64	200,0

Fig. 24. Les lignes AB et AC étant celles des solides, B et C les numéro 54, D et E les numéro 16, on fera la distance DE égale à un des côtés de la pyramide FGHI, par exemple, au côté FG, et la distance BC sera le côté homologue de la pyramide cherchée; faisant la distance DE successivement égale aux lignes GH et FH, on trouvera celles LM et KM; puis décrivant des points L et K, comme centre, et avec ces lignes pour rayon, de petits arcs, on construira la base MKL de la pyramide cherchée : à l'aide de FI et GI, on déterminera de la même maniere KN et LN, et joignant les intersections N et M, on aura NM homologue de IH.

Démonstration.

Les lignes AD et AB sont les côtés homologues de deux solides semblables et dans le rapport de 16 à 54; donc, à cause de la similitude des triangles ADE et ABC, les lignes DE et BC sont aussi côtés homologues de deux solides sem-

blables et dans le même rapport que les deux premiers.

Remarque.

Si un des côtés de la pyramide donnée étoit précisément égal à la distance du point A au nombre qui fait le premier terme du rapport entre les deux pyramides, c'est-à-dire si, pour notre exemple, on avoit FG = A 16, le côté homologue de la pyramide à construire seroit la distance du point A au nombre qui fait le second terme de ce rapport; ou bien, pour le cas dont il s'agit, on auroit KL = A 54. Mais toutes les fois que ce cas n'a pas lieu, on fait une opération qui n'est, au fond, que la construction d'une nouvelle ligne des solides telle qu'on ait la condition énoncée plus haut. En effet, soit la distance des points 16 égale à FG, et soit menée la ligne 64,64; si on considere cette ligne, toujours supposée contenir 1000 parties, comme le côté d'un 64e solide, les lieux des no. 1', 2', etc. 16', 54', seront tels que les lignes 1', 1; 2', 2, etc. 16', 16; 64', 54, devien- Fig. 25.

dront paralleles à la ligne AB′, et qu'ainsi on aura 16, 16=B′ 16′; 54, 54=B′54′. De même, en cherchant un autre côté, on construit une autre ligne des solides. On construit donc réellement autant de lignes de solides qu'on détermine de nouvelles ouvertures de compas, et chacune a la propriété d'avoir la distance B′ 16′ égale au côté de la pyramide dont on cherche l'homologue.

Si l'un des deux termes, ou tous les deux, surpassoient 64, il faudroit transformer, par la division, ce rapport en un autre qui lui fût égal, ou qui en approchât le plus possible, et dont les deux termes fussent plus petits que 64.

Si on désigne par *a* et *x* les côtés homologues de deux solides, et par *m* : *n* leur rapport, lorsque les quantités *m* et *n* seront des cubes parfaits, on pourra résoudre le problême au moyen de la ligne des parties égales.

Enfin si les deux termes du rapport sont des fractions non réduites au même dénominateur, on commencera par les

réduire, et le rapport des nouveaux numérateurs sera celui des solides. Mais si les deux termes de chaque fraction étoient des cubes parfaits, il faudroit d'abord extraire les racines, et opérer ensuite sur la ligne des parties égales, en prenant seulement les numérateurs.

Quand on propose de construire un solide qui soit à un autre dans une raison donnée, la premiere chose à faire est de chercher quelles sont les lignes dont on a besoin pour le construire. Ainsi, lorsque le solide demandé sera une pyramide, on aura à chercher les côtés de la base et la hauteur; lorsqu'il sera un cône ou un cylindre, on n'aura que deux lignes à déterminer, le diametre de la base et la hauteur; et lorsqu'il sera une sphere, on n'en aura qu'une, savoir le diametre. Dans tous les cas, pour trouver les inconnues, on opérera comme il a été dit page 79.

PROBLÈME II.

Deux solides semblables étant donnés, trouver leur rapport.

Lemme.

Fig. 26. Supposons que les points F et G, n°. 1, répondent aux n°. 16, et les points K et L aux n°. 48; le rapport de 16 à 48 étant celui des deux solides, si on prend une autre ouverture de compas telle que les points F et G tombent sur les numéro 10, les extrémités K et L tomberont nécessairement sur 30. En effet, n°. 1, on a $\overline{FG}^3 : \overline{KL}^3 :: 16 : 48$, et, n°. 2, $\overline{FG}^3 : \overline{KL}^3 :: 10 : x$; donc à cause que les deux proportions ont un rapport commun, on aura

$$16 ; 48 :: 10 : x = \frac{480}{16} = 30;$$

d'où l'on voit que quelle que soit l'ouverture, le rapport cherché sera toujours donné par celui des nombres sur lesquels tomberont les extrémités des lignes données.

Application.

Fig. 24. Qu'on propose, par exemple, de trou-

ver le rapport des deux pyramides IFGH, NKLM, qu'on sait d'avance être celui de 16 à 54 : on placera le côté FG transversalement entre deux numéro pareils de la double ligne des solides, après quoi on recherchera sur cette double ligne deux numéro identiques dont la distance soit égale au côté KL, et le rapport entre le premier et le second numéro sera celui des solides.

Remarque.

Si le côté d'un des solides est très grand par rapport au côté homologue de l'autre, il faudra porter celui-ci le plus près possible du centre; car alors on déterminera une assez grande ouverture de compas pour qu'il soit possible de placer le plus grand côté.

Mais si le côté du petit solide est lui-même d'une longueur telle, qu'en le plaçant près du centre les deux jambes du compas forment presque une regle droite, ou bien si, porté à une certaine distance du centre, afin d'avoir une

moindre ouverture, on ne peut plus placer l'autre entre deux numéro identiques, alors il faudra les étendre, à partir du centre, sur la ligne des solides, et le rapport cherché sera celui des numéro correspondants aux extrémités de ces côtés. En effet, soit $m : n$ le rapport des deux solides, a et b deux côtés homologues, c et d les distances du centre du compas aux numéro m et n; on aura la suite de rapports égaux

$$m : n :: c^3 : d^3 :: a^3 : b^3,$$

d'où l'on voit que le rapport des nombres correspondants aux extrémités des longueurs a et b sera celui des solides dont elles sont deux côtés homologues.

Pour résoudre le probléme II au moyen de la ligne des parties égales, il faudroit trouver deux lignes qui fussent entre elles dans le rapport de $\overline{AB}^3$ à $\overline{AC}^3$, car portant ces lignes sur celles des parties égales, à compter de l'origine, le rapport des nombres correspondants aux extrémités B et C seroit celui des solides. C'est le problème que nous allons résoudre.

Solution.

Soient B A C, numéro 1, la double ligne des solides; FG, HI, les côtés homologues de deux solides semblables que je suppose être dans le rapport de 10 à 20; si, sur une ligne indéfinie, numéro 2, on prend $AB = FG$ et $AC = HI$, et que des points B et C, comme centre, avec ces lignes pour rayon, on décrive les demi-circonférences A C′E, A D′F; si du point A on mene la corde $AC' = AC$, prolongée jusqu'à la rencontre de l'autre circonférence en D′, et que des points C′ et D′, comme centre, et avec ces lignes pour rayon, on décrive les arcs D″D et E′E, les deux lignes AB et AE seront entre elles dans le rapport de $\overline{FG}^3$ à $\overline{FI}^3$. Fig. 27.

Démonstration.

En effet les triangles semblables AEC′, ADD″; AFD′, AEE′, donnent les deux proportions

$$AE : AD'' :: AC' : AD,$$
$$AE' : AF :: AE : AD';$$

divisant par 2 les deux termes du pre-

mier rapport de chaque proportion, on a celles-ci,

$$\frac{AE}{2} : \frac{AD''}{2} :: AC' : AD$$

ou $AB : AC'(AC) :: AC : AD$ . . (F),

$$\text{et } \frac{AE'}{2} : \frac{AF}{2} :: AE : AD'$$

ou $AD' : AC :: AE : AD'(AD)$ . . (G).
Des proportions F et G on tire

$$AB = \frac{\overline{AC}^2}{AD} \text{ et } AE = \frac{\overline{AD}^2}{AC};$$

divisant ces deux équations l'une par l'autre, on trouve

$$\frac{AB}{AE} = \frac{\overline{AC}^3}{\overline{AD}^3}$$

égal au rapport des solides qui ont les lignes FG et HI pour côtés homologues. En effet, si on porte les lignes FG et HI sur la ligne des parties égales, à partir de son origine, on trouvera que le point G tombe sur 54 et le point I sur 108; le rapport de ces nombres $= \frac{1}{2} = \frac{10}{20}$, c'est-à-dire celui des solides.

PROBLÈME III.

Ouvrir le compas de proportion de maniere que la double ligne des solides fasse un angle droit.

Solution.

Ce probléme est susceptible d'une foule de solutions, puisqu'on est maître de la longueur des côtés qui comprennent l'angle droit. En effet, supposant qu'un de ces côtés soit celui du troisieme solide, et l'autre celui du huitieme, le troisieme que j'appelle x sera donné par l'équation

$$\overline{72,0}^2 + \overline{100,0}^2 = xx,$$

les nombres 72,0 et 100,0 étant ceux des parties que renferment les côtés des troisieme et huitieme solides; on tire de là $xx = 151,84$ et $x = 123,22$, valeur sensiblement égale à celle du côté du quinzieme solide; ainsi après avoir pris la distance de l'origine au numéro 15 de la ligne des solides, on écartera les jambes du compas jusqu'à ce que cette dis-

tance soit celle des points 3 et 8, et alors l'angle au centre sera droit.

On pourroit à la place de 72,0 et 100,0 prendre deux autres nombres dans la table des parties que contiennent les côtés homologues des solides, et après avoir opéré comme ci-dessus, on rechercheroit dans la même table la valeur trouvée pour x, ou celle qui en approche le plus; puis prenant le n°. qui se trouve vis-à-vis, on connoîtroit la distance à laquelle on doit amener les n°. correspondants aux deux nombres qu'on a choisis, pour que la double ligne des solides fasse un angle droit.

Autre solution.

Appelant x le côté du huitieme solide, et a celui du soixante-quatrieme, on a $x^3 : a^3 :: 8 : 64$; d'où $x : a :: 2 : 4$; d'où l'on voit que la distance du centre au n°. 8 est égale à la moitié de la ligne entiere des solides, et conséquemment à la moitié de la ligne entiere des cordes, ou bien au rayon : or, pour que deux rayons fassent entre eux un angle droit,

il faut que la distance entre leurs extrémités soit égale à la longueur de la corde de 90°; ainsi prenant cette corde, et plaçant une de ses extrémités sur le n°. 8 de la ligne des solides, on écartera les deux jambes du compas jusqu'à ce que l'autre extrémité tombe aussi sur le n°. 8.

PROBLÈME IV.

Construire un solide égal et semblable à deux solides semblables.

Solution.

Ayant posé les extrémités d'un côté quelconque de l'un des deux solides sur deux numéro identiques de la double ligne des solides, ce qui déterminera une certaine ouverture de compas, on cherchera sur cette double ligne deux autres numéro identiques distants l'un de l'autre de la longueur du côté homologue de l'autre solide; ceci fait, et l'ouverture du compas restant la même, on prendra un troisieme numéro égal à la somme des deux premiers, et la distance

de ce dernier à son identique sera la longueur du côté homologue du solide à construire.

Application.

Fig. 28. On propose de construire une pyramide égale et semblable aux pyramides IFGH, NKLM : soient BAC la double ligne des solides, FG et KL les côtés dont on propose de trouver l'homologue ; on prendra, à volonté, deux n°., 8 par exemple, dont on fera la distance = FG ; puis, l'ouverture du compas étant ainsi déterminée, on placera parallèlement entre deux numéro identiques le côté homologue KL ; je suppose que les extrémités de KL tombent sur 27, on fera la somme de 27 + 8 = 35, et la distance 35, 35 sera le côté homologue de la pyramide à construire.

Démonstration.

On a vu (prob. 2) que le rapport entre les nombres 8 et 27, ainsi trouvé, étoit celui des solides ; on aura donc la proportion

$$A : B :: 8 : 27.$$

Appelant X la pyramide à construire, on aura par la même raison

A : X :: 8 : 35.

La premiere proportion donne

A : A + B :: 8 : 8 + 27,

ou A : A + B :: 8 : 35;

donc A : X :: A : A + B, et X = A + B; d'où l'on voit que le côté 35, 35 ainsi déterminé est l'homologue de ceux KL et FG, et qu'il appartient à une pyramide égale en solidité aux deux pyramides données.

PROBLÈME V.

Le diametre d'une sphere étant donné, trouver les côtés des cinq corps réguliers inscrits à cette sphere.

1°. Trouver celui du tétrahedre.

On ouvrira le compas de proportion en sorte que la distance des n°. 60 de la double ligne des plans soit égale au diametre de la sphere, et celle des n°. 40 donnera la grandeur du côté cherché.

2°. Trouver le côté de l'octahedre.

L'ouverture du compas restant la même, la distance des n°. 30 sera le côté de l'octahedre.

3°. Trouver le côté du cube.

Pour la même ouverture de compas, la distance des numéro 20 sera le côté du cube.

4°. Trouver le côté du dodécahedre.

On ouvrira le compas de proportion en sorte que la distance des numéro 60 de la double ligne des polygones soit égale au diametre de la sphere, et celle des numéro 36 sera la longueur du côté cherché.

5°. Trouver le côté de l'icosahedre.

On fera faire à la double ligne des polygones un angle tel que la distance des numéro 5 soit égale au diametre de la sphere; et celle des numéro 10 donnera le côté de l'icosahedre.

Remarque.

Nous ne faisons ici que construire, au moyen du compas de proportion, les quatriemes termes de cinq proportions données par la géométrie.

Lemme.

Si quatre lignes sont telles que les trois premieres forment une proportion continue, et que le cube de la troisieme soit égal au produit de la premiere par le quarré de la quatrième, ces quatre lignes formeront une suite de rapports égaux.

Soient FG, KL, DE, HI, ces quatre lignes; par supposition on a

$$FG \cdot \overline{HI}^2 = \overline{DE}^3,$$

d'où l'on tire

$$FG : DE :: \overline{DE}^2 : \overline{HI}^2,$$

et multipliant les deux termes du premier rapport par DE,

$$FG \cdot DE : \overline{DE}^2 :: \overline{DE}^2 : \overline{HI}^2;$$

mais la proportion

$$FG : KL :: KL : DE$$

donne $FG \cdot DE = \overline{KL}^2$,
ainsi la proportion précédente se change en celle-ci,

$$\overline{KL}^2 : \overline{DE}^2 :: \overline{DE}^2 : \overline{HI}^2,$$

ou $KL : DE :: DE : HI$;
ce qui donne la suite de rapports égaux
$FG : KL :: KL : DE :: DE : HI$.

PROBLÊME VI.

Trouver deux moyennes proportionnelles entre les lignes FG *et* HI.

Solution.

Tout se réduit à trouver une des deux Fig. 29. moyennes proportionnelles, car alors on n'aura plus qu'à chercher une moyenne proportionnelle entre celle-ci et une des lignes extrêmes (c'est l'objet du problème V, chap. III). Soient FG = 20 parties de la ligne des lignes, HI = 45 de ces parties, BAC la double ligne des solides, B et C les n°. 45, D et E les n°. 20; on fera la distance BC = HI, et celle DE sera une des deux moyennes proportionnelles.

Démonstration.

En effet les deux triangles semblables ABC, ADE, donnent

$$AB : AD :: BC : DE$$

$$\text{ou } AB : AD :: HI : DE,$$

$$\text{et } \overline{AB}^3 : \overline{AD}^3 :: \overline{HI}^3 : \overline{DE}^3;$$

mais à la place du rapport de $\overline{AB}^3 : \overline{AD}^3$, on peut mettre celui de 45 à 20, ou bien celui de HI à FG; on aura donc

HI :

$$HI : FG :: \overline{HI}^3 : \overline{DE}^3,$$

et multipliant les deux termes du premier rapport par $\overline{HI}^2$,

$$\overline{HI}^3 : FG \times \overline{HI}^2 :: \overline{HI}^3 : \overline{DE}^3,$$

d'où $FG \times \overline{HI}^2 = \overline{DE}^3$.

PROBLÈME VII.

Trouver le côté d'un cube égal en solidité à un parallélipipede.

Construction et démonstration.

Soient H la hauteur du parallélipipede, B et C les deux côtés de la base, et P le côté cherché du cube ; il faut avoir $PPP = HBC$. On cherchera d'abord une moyenne proportionnelle M entre B et C, ce qui donnera $MM = BC$, et multipliant les deux membres par H, $MMH = BCH$; cherchant ensuite deux moyennes proportionnelles P et S entre M et H, on aura $M : P :: P : S :: S : H$; d'où $MH = PS$, et $MS = PP$: ces deux équations donnent

$$\frac{MH}{P} = S, \quad \frac{PP}{M} = S ; \text{ donc } \frac{MH}{P} = \frac{PP}{M},$$

et $MMH = PPP = BCH$. C. Q. F. T.

CHAPITRE VI.

Usage et construction des lignes des métaux, du poids des boulets, et du calibre des pieces.

Usage.

DANS l'espace formé par la double ligne des solides on voit une ligne intitulée, *les métaux* : elle sert à trouver les diametres de six spheres métalliques de même poids, le diametre de celle qui a la plus petite pesanteur spécifique étant supposé = 6 pouces.

Construction.

Soient P et p les poids de deux corps, V et v les volumes, φ et φ' les poids de l'unité des volumes de chacun de ces corps, ou les pesanteurs spécifiques ; on démontre en méchanique qu'on a

$$P : p :: V\varphi : v\varphi'.$$

Faisant $P = p$, on a cette équation

$$V\varphi = v\varphi',$$

d'où $\varphi : \varphi' :: v : V :: d^3 : D^3$,
d et D représentant les diametres des volumes v et V.

Dans le compas de proportion, la ligne des métaux, supposée = 200 parties, est prise pour représenter le diametre d'une sphere d'étain, ou d; ainsi pour trouver celui d'une sphere d'un métal donné, ou D, il faudra connoître les valeurs de φ et φ', et on les obtiendra en pesant des volumes égaux de ces matieres.

Il suffit de jeter un coup-d'œil sur la table des pesanteurs spécifiques de M. Brisson pour se convaincre qu'il est impossible de construire une ligne des métaux d'un usage général ; car on y verra que la pesanteur spécifique d'une même substance varie suivant le travail qu'elle a subi. Par exemple, le poids d'un pied cube de fer fondu est

= 504 liv. 7 on. 5 gros 52 gra.,

tandis que celui du fer forgé en barre est

= 545 liv. 2 on. 4 gros 35 gra.;

le poids d'un égal volume d'étain pur de

Cornouailles, fondu et non écroui, est

$= 510^{liv.}\ 6^{on.}\ 2^{gros}\ 68^{gra.}$:

d'où l'on voit que, pour la premiere espece de fer, c'est le diametre de la sphere d'étain qui sert d'échelle, et que le contraire arrive lorsqu'on opere sur le fer forgé en barre. La même variation a lieu dans les pesanteurs spécifiques des autres métaux ; la table citée plus haut en donne quatorze pour l'or et plus ou moins pour les autres substances métalliques. Ainsi l'usage de cette ligne est restreint aux métaux particuliers dont on s'est servi pour la construire, et l'un d'eux venant à varier, la longueur trouvée pour le diametre de sa sphere, et, dans quelques cas, l'échelle entiere, varient en même temps. Il résulte de toutes ces considérations qu'on doit faire disparoître *la ligne des métaux* du compas de proportion.

De la ligne du poids des boulets.

Usage.

Cette ligne sert à trouver le poids d'un boulet dont le diametre est donné. Supposons, par exemple, qu'on veuille trouver le poids d'une sphere dont le diametre seroit = 4 po. 9 l. = $158\frac{1}{3}$ parties; ayant ouvert le compas de proportion en sorte que la ligne du poids des boulets dont toute la longueur se trouve sur les deux regles ne forme qu'une seule ligne droite, on prendra $158\frac{1}{3}$ entre les pointes d'un compas, et posant l'une sur l'origine de la ligne qui se trouve à la gauche du mot poids, l'autre pointe portée vers la droite ira rencontrer le nombre 16, ce qui indiquera que ce boulet pese 16 liv.

Construction.

L'expérience a appris qu'un boulet de fer fondu de 3 po. de diametre pese 4 liv.; ainsi faisant la distance transversale des numero 4 de la double ligne des solides

égale à la distance latérale A 100 de la ligne des parties égales, c'est-à-dire à trois pouces, les distances transversales d'un numero à son égal donneront les diametres de boulets dont les poids seront exprimés par ces numero; portant donc toutes ces distances, à partir d'un point fixe, sur une ligne indéfinie, et écrivant les nombres 1, 2, 3. etc. à leurs extrémités, on aura construit une ligne *du poids des boulets*, ou plutôt une ligne du poids de spheres de même métal. Pour avoir les fractions de livres, on fera la distance transversale des numéro 4, pris sur la ligne des solides, égale au diametre du boulet d'une livre trouvé plus haut, et alors celles des numero 1, 2, 3, seront les diametres des boulets de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ de livre, qu'on portera sur la même ligne et à partir du même point.

Démonstration.

La construction de cette ligne est fondée sur cette proportion trouvée précédemment

$$P : p :: V\varphi : v\varphi'.$$

Comme toutes les spheres sont d'un même métal, on a $\varphi = \varphi'$, et

$$P : p :: V : v :: D^3 : d^3.$$

D'où l'on voit qu'au rapport entre les poids on peut substituer le rapport entre les volumes ; c'est aussi ce qu'on a fait en écrivant aux extrémités des diametres les numéro de la ligne des solides pris pour exprimer des livres. Désignant de même par D et *d* les distances transversales des numero 4 et 1, on a

$$d^3 : D^3 :: 4 : 1 :: 1 : \tfrac{1}{4}.$$

D est donc le diametre d'un boulet pesant un quart de livre.

En prenant cette ligne dans l'acception qu'on lui donne, on ne devroit y marquer que les nombres 24, 16, 12, 8 et 4, poids fixés pour les boulets par l'ordonnance du 7 octobre 1732. (Voyez l'art. V de l'Artillerie raisonnée de M. le Blond.)

De la ligne du calibre des pieces.

Usage.

Le calibre d'une piece est le diametre de sa bouche ou de son ouverture. Les nombres qu'on trouve sur *la ligne des calibres* donnent des poids de boulets, et les distances de ces nombres à l'origine de cette ligne sont les diametres de la bouche, ou les calibres des pieces qui chassent ces boulets.

Construction.

On sait que pour que le boulet n'éprouve pas de la part de la paroi un frottement qui diminueroit sa quantité de mouvement, on fait le diametre de l'ouverture de la piece un peu plus grand que celui du boulet, et que la différence entre ces diametres est appelée le *vent du boulet*; ainsi pour construire une *ligne du calibre des pieces*, il ne faut qu'ajouter aux différents diametres des boulets le nombre de lignes fixées pour le vent.

La table suivante, tirée de l'ouvrage cité page 103, donne ces différences pour les pieces en usage aujourd'hui; on a négligé ici les points et parties de point dont l'ordonnance fait mention.

PIECES.	24	16	12	8	4
VENT.	$2^{l.}$	$2^{l.}$	$2^{l.}$	$1^{l.}$	$1^{l.}$

En général on prend pour le vent environ une ligne et demie ou deux lignes; ainsi, par exemple, mesurant sur la ligne des calibres la distance de l'origine au numéro 24 et sur celle du poids des boulets la distance entre les deux mêmes points, la différence de cette derniere ligne à la premiere, ce qui fait le vent, portée sur celle des parties égales, à compter du centre du compas, mesurera quatre divisions, et sa valeur sera donnée par la proportion

$$200 : 72^{\text{lig.}} :: 4 : x = 1^{\text{lig.}} + \frac{11}{25}.$$

CHAPITRE VII.

Définition et construction de la ligne des cordes, sinus, tangentes, et sécantes.

Définition.

La ligne des cordes sert à mesurer un angle sur le papier, ou bien à rapporter des angles observés; cette ligne divisée avec autant d'exactitude que l'est celle du secteur anglois est très préférable au rapporteur ordinaire, et peut remplacer, jusqu'à un certain point, les tables des cordes dont nous parlerons plus bas. On peut aussi l'employer dans la description des polygones réguliers. Sur certains compas, la ligne entiere des cordes est égale au rayon, ou à la corde de 60°; sur d'autres elle est la corde de 180° ou le diametre. La premiere de ces lignes est préférable : car 1°. on peut aussi avec

elle construire un angle aussi grand qu'on voudra, en portant deux fois la corde de sa moitié, trois fois la corde de son tiers, etc. 2°. elle peut être divisée avec beaucoup plus d'exactitude que la premiere: 3°. elle donne les demi degrés; et comme, dans une assez grande latitude, l'intervalle entre les divisions du dernier ordre est assez grand, on peut estimer les quarts de degré.

Les lignes des sinus, tangéntes et sécantes combinées avec celle des parties égales servent à résoudre tous les problêmes de la trigonométrie plane, quelques uns de la trigonométrie sphérique, et une foule d'autres dont nous donnerons les plus intéressants et les plus curieux.

Construction.

Je suppose qu'on soit muni du petit ouvrage de M. Baudusson, intitulé, *Table des cordes de chaque angle depuis une minute jusqu'à* 180°, *pour un rayon* = 1000 (1); voici comme on procédera

(1) Cet ouvrage se vend chez Firmin Didot, libraire, rue Dauphine, à Paris.

pour avoir sur la ligne des cordes celle d'un nombre quelconque de degrés, par exemple de 34° 30′: on cherchera dans la table 34° 30′, et à côté on trouvera 593, valeur de la corde de cet angle pour un rayon = 1000; mais comme la ligne entiere des cordes est égale à celle des parties égales, on pourra prendre cette derniere pour échelle, ce qui est d'autant plus avantageux qu'elle sera divisée très exactement par le procédé développé chapitre II. Dans ce cas, le rayon devient = 200, et on trouve les cordes, pour ce rayon, en séparant dans les tables le premier chiffre à droite par une virgule et multipliant ensuite par 2, ce qui donne corde de 34° 30′ = 118,6: prenant donc ce nombre de parties sur la ligne des lignes et les portant, à partir du centre, sur celle des cordes, on aura déja celle de 34° 30′. On opérera de la même maniere pour avoir les autres.

Comme le sinus d'un angle est la moitié de la corde du double de cet angle, après avoir trouvé la valeur de cette corde

dans les tables, on en séparera seulement un chiffre vers la droite; ainsi la corde de 60° étant = 200, on aura sin. 30° = 100 parties prises sur la ligne des lignes.

Construction de la ligne des tangentes.

La ligne des tangentes se divisera de la même maniere, en ramenant les tangentes naturelles à un rayon de 200 parties. On trouve dans la trigonométrie de Desparcieux des tables de sinus, tangentes et sécantes naturels.

Construction de la ligne des moindres tangentes.

Pour trouver la distance du centre du compas à l'origine de la ligne des moindres tangentes, ou le lieu du numero 45, on posera la proportion

$$\text{tang. } 76° : 200 :: \text{tang. } 45 : x,$$

de laquelle on tire $x = 49.9$ parties de la ligne des lignes; et généralement la distance du centre à un nombre n de degrés sera donnée par le quatrieme terme de la proportion

$$\text{tang. } 76° : 200 :: \text{tang. } n° : x,$$

x étant mesurée sur la ligne des parties égales.

Construction de la ligne des sécantes.

La distance du centre à l'origine de la ligne des sécantes est égale à la sécante de 10°, et cette distance sera donnée par le quatrieme terme de la proportion

séc. 76° : 200 :: séc. 10° : x,

la valeur de x étant mesurée sur la ligne des parties égales. On calculera la sécante d'un nombre n de degrés au moyen de la proportion suivante

séc. 76° : 200 :: séc. n° : x.

On fera bien de chercher le lieu de 0°, parcequ'on en a besoin pour déterminer la sécante d'un nombre de degrés donnés pour un rayon donné.

Tangentes.

Le nombre écrit vis-à-vis une division est celui des degrés correspondants à cette division, de 5 en 5 degrés; la division est un peu plus longue que les autres. Entre les divisions du premier ordre et celles du second se trouvent quatre autres divisions qui surpassent les in-

termédiaires; celles-là correspondent à des degrés et celles-ci à des demi-degrés.

Sinus.

Depuis le centre jusqu'à 60° la ligne des sinus est divisée comme celle des tangentes; de 60° à 70° elle est divisée seulement de degré en degré; de 70° à 80° de deux en deux degrés; et de 80° à 90° on est réduit à estimer la division à l'œil.

Cordes.

La ligne des cordes est divisée à l'instar de celle des tangentes.

Moindres tangentes.

De 45° à 50° la ligne des moindres tangentes est graduée de deux en deux degrés; mais de 50° à 60° on a le degré; et de 60 jusqu'à l'extrémité ou 76° les divisions donnent les demi-degrés.

Sécantes.

Dans la ligne des sécantes, de 10° à 20° on est réduit à estimer à l'œil; de 20° jusqu'à 60° les divisions croissent par deux degrés; et de 60° jusqu'à 76° par demi-degré.

Usage de la ligne des cordes.

PROBLÊME Ier.

Prendre sur la circonférence d'un cercle donné un arc d'un nombre déterminé de degrés.

Solution.

Après avoir fait la distance des numéro 60 de la double ligne des cordes égale au rayon du cercle donné, on prendra la distance transversale des degrés demandés, laquelle sera égale à la corde de ce nombre de degrés dans un cercle qui a pour rayon la premiere des deux distances.

Application.

Fig. 28. Soit l'arc cherché = 80° : BAC étant la double ligne des cordes, D et E les lieux des numéro 60, B et C ceux des numéro 80, on fera DE égale à FG rayon du cercle donné; puis d'un point quelconque G, avec BC pour rayon, on coupera la demi-circonférence GHK en un point H, et l'arc GH sera de 80°.

Démonstration.

Les triangles B A C et D A E sont semblables, et B A est la corde de 80° dans un cercle qui a AD pour rayon; donc BC sera la corde du même nombre de degrés dans un cercle décrit du rayon DE.

Remarque.

Lorsque la ligne entiere des cordes est égale au rayon, comme dans le secteur anglois, et que le nombre des degrés de l'arc surpasse 60, alors on prend la moitié, le tiers, etc. de ces degrés; et après avoir opéré comme ci-dessus, on porte deux fois, trois fois, etc. la corde trouvée, ou la transversale de la moitié, du tiers, etc. de ce nombre de degrés.

Quand le nombre de degrés donné est très petit, il est plus exact d'employer son complément à 60°. Ainsi pour avoir l'arc de 3° sur la demi-circonférence BCH, on fera la distance des numéro 60 égale à AC, puis du point C, comme centre, avec celle des numéro 57, on coupera l'arc CB de 60° en un point *f*, ce qui donnera l'arc *f*B de 3°. Fig. 29.

PROBLÈME II.

Connoissant le rayon d'un cercle, trouver le nombre de degrés d'un arc donné.

Solution.

Après avoir fait la distance des numéro 60 égale au rayon, on placera la corde de l'arc transversalement en sorte que ses extrémités tombent sur deux numéro identiques, lesquels indiqueront le nombre de degrés contenus dans l'arc.

Remarque.

A l'aide du problème I on pourra faire à un point donné sur une ligne un angle d'un nombre déterminé de degrés, et par le prob. II, on trouvera le nombre de degrés d'un angle tracé; on est donc en état de résoudre celui qui suit : *construire sur une base donnée un triangle isoscele dont l'angle à la base soit à l'angle au sommet dans un rapport donné.* Soient $m : n$ le rapport du premier de ces deux angles au second, et x l'angle au sommet; on aura la proportion

$$n : m :: x : \frac{mx}{n},$$

dont le quatrieme terme est l'angle à la base; et comme la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°, on aura pour déterminer x l'équation

$$\frac{2m}{n}x + x = 180^\circ,$$

de laquelle on tire

$$x = \frac{n\,180^\circ}{2m+n}.$$

Application.

Soient AB la base donnée, $n = 1$, Fig. 30. $m = 2$; on aura $x = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$, et conséquemment l'angle à la base $= 72^\circ$; pour construire le triangle, on fera la distance transversale des numéro 60 de la ligne des cordes égales à AB, et prenant celle des numéro 36, on la portera deux fois, à compter du point A, sur un arc décrit du point B comme centre, avec BA pour rayon; après avoir fait la même opération du côté de B, on menera par les extrémités A et n, B et n', des lignes droites qui se couperont en un point C, et le triangle ABC sera conditionné comme on le demande. On pourra s'en assurer

en cherchant le nombre de degrés des arcs An et Bn'.

PROBLÈME III.

Connoissant le nombre de degrés d'un arc de cercle, trouver le rayon.

Solution.

On ouvrira le compas de proportion en sorte que la distance transversale des numéro qui indiquent le nombre de degrés donnés soit égale à la corde de l'arc, alors la distance transversale des numéro 60 donnera le rayon cherché.

Application.

Fig. 31. HIG est un arc de 80°, et on demande le rayon avec lequel cet arc a été décrit. Soient BAC la double ligne des cordes, B et C les lieux des numéro 80, D et E ceux des numéro 60; on fera la distance BC=HG, et la distance résultante DE sera le rayon cherché.

Remarque.

Dans le cas où la ligne entiere des cordes ne marqueroit que 60°, on détermineroit l'ouverture de compas en

prenant la corde de la moitié, du tiers, du quart de l'arc donné, pour en faire la distance transversale entre le nombre de degrés contenus dans l'arc moitié, tiers, ou quart, etc. et le rayon cherché seroit la distance transversale des numéro 60 correspondante à cette ouverture. En effet, toute corde prise dans le cercle dont HG est le rayon doit, étant placée convenablement, donner la distance des numéro 60 égale au rayon de ce cercle.

Tout ce que nous venons de dire suppose qu'on connoisse le nombre de degrés de l'arc GIH; mais si ce nombre de degrés n'étoit pas donné, on le trouveroit comme il suit: prenant sur l'arc GIH un point I quelconque, à volonté, on menera les cordes IH et IG; puis mesurant l'angle HIG et ôtant de 360° le double du nombre de degrés trouvés, on aura celui de l'arc GIH. Supposons actuellement qu'on n'ait que les trois points G, I et H, on pourra donc trouver le rayon GC, ainsi on aura résolu

ce problême : *par trois points donnés faire passer un arc de cercle.*

PROBLÊME IV.

Ouvrir le compas de proportion en sorte que l'angle formé par la double ligne des cordes soit d'un nombre déterminé de degrés.

Solution.

On fera la distance transversale des numéro 60 égale à la distance latérale du centre du compas au nombre de degrés proposé.

Application.

Fig. 32. Soit l'angle cherché = 40°; B et C étant les lieux des numéro 60° de la double ligne des cordes et D celui du numéro 40, on fera la distance BC=AD, et on aura BAC=40°.

Démonstration.

AD étant la corde de 40° dans un cercle dont le rayon est AB, BC=AD sera la corde du même angle pour le même rayon.

PROBLÈME V.

Trouver l'angle formé par la double ligne des cordes, pour une ouverture de compas prise à volonté.

On voit d'abord que ce problême est l'inverse du précédent; dans celui-ci on donnoit la distance latérale et on en concluoit la distance transversale des numéro 60, ou l'angle au centre; ici c'est la distance transversale des numéro 60 qu'on connoît et on cherche la distance latérale.

Solution.

On prendra la distance transversale des numéro 60 pour l'ouverture donnée, et posant une des pointes du compas sur le centre A, le numéro que rencontrera l'autre pointe donnera les degrés cherchés.

La démonstration est l'inverse de celle donnée au problême IV.

PROBLÊME VI.

Couper une ligne donnée en moyenne et extrême raison.

Solution.

Faites la distance transversale des numéro 60 égale à la ligne donnée; alors celle de 36 à 36 portée sur cette ligne, à compter de l'origine, donnera le plus grand segment.

Démonstration.

On démontre en géométrie que le côté d'un décagone régulier inscrit au cercle est égal au grand segment du rayon de ce cercle divisé en moyenne et extrême raison; or le côté du décagone est la corde de 36°, donc la distance des numéro 60 étant prise pour rayon, la distance parallele correspondante des n°. 36 sera le plus grand segment de cette ligne coupée suivant la raison donnée.

Usage des lignes de sinus, tangentes et sécantes.

PROBLÈME VII.

Le rayon d'un cercle étant de deux pouces, trouver le sinus et la tangente de 28° 30'.

Solution.

Ouvrez le secteur en sorte que la distance transversale des numéro 90 sur la double ligne des sinus, ou de 45 sur celle des tangentes, soit égale au rayon donné, c'est-à-dire à deux pouces; alors la distance transversale des nº. 28° 30' sera la longueur du sinus ou de la tangente pour ce rayon.

PROBLÈME VIII.

Trouver, pour la même longueur de rayon, la sécante de 28° 30′.

Solution.

Faites du rayon donné la distance transversale de o à o, à l'origine de la ligne des sécantes ; et la distance correspondante des degrés donnés sera la sécante de ces degrés pour un rayon de deux pouces.

PROBLÈME IX.

Trouver la tangente d'un angle qui surpasse 45°, par exemple celle de 60°.

Solution.

Pour résoudre ce problême, il faut se servir de la ligne des plus petites tangentes ; alors supposant le rayon de deux pouces, on tiendra à cette distance les numéro 45 qui se trouvent à l'origine de cette ligne, et la distance correspondante des numéro 60 sera la tangente de ce nombre de degrés pour le rayon donné.

Remarque.

Les échelles des moindres tangentes et sécantes ne vont que jusqu'à 76° : mais comme on a souvent besoin de ces lignes pour un plus grand nombre de degrés, nous avons cru devoir donner ici une table des tangentes et sécantes naturelles au-dessus de 75°, le rayon étant = 1.

DEGRÉS.	TANGENTES NATURELLES.	SÉCANTES NATURELLES.
76	4,011	4,133
77	4,331	4,445
78	4,701	4,810
79	5,144	5,241
80	5,671	5,759
81	6,314	6,392
82	7,115	7,185
83	8,144	8,205
84	9,514	9,567
85	11,430	11,474
86	14,301	14,335
87	19,081	19,107
88	28,636	28,654
89	57,290	57,300

Usage de cette table.

Après avoir mesuré le rayon donné sur l'échelle des parties égales, on multipliera la valeur tabulaire de la tangente ou de la sécante par celui des parties contenues dans ce rayon, et le produit indiquera le nombre de parties à prendre sur la ligne des lignes pour avoir la longueur de la tangente ou de la sécante cherchée.

Application.

Trouver la longueur de la tangente et de la sécante de 80°, pour un rayon qui, mesuré sur une échelle de vingt-cinq parties pour un pouce, renferme $47\frac{1}{2}$ de ces parties.

Pour 80° on a

tang. =	5,671	sec. = 5,759
rayon. =	47,5	47,5
	28355	28795
	39697	40313
	22684	23036
	269,3725	273,5525

Démonstration.

Désignant toujours par x la ligne cherchée, on aura, à cause de la similitude des triangles,

$$x : R' :: R : \text{sin. } 12^\circ;$$

substituant pour sin. 12° sa valeur

$$\frac{RR}{\text{cosée. } 12^\circ} = \frac{RR}{\text{séc. } 78^\circ}$$

et multipliant les deux termes du dernier rapport par

$$\frac{\text{séc. } 78^\circ}{R},$$

la proportion se change en celle-ci,

$$x : R' :: \text{séc. } 78^\circ : R,$$

laquelle fait voir que la ligne x est la sécante de 78° pour le rayon donné.

En inversant ces opérations, on a des moyens de trouver les degrés correspondants à des tangentes et sécantes qui seroient trop longues pour être portées transversalement quand le secteur est ouvert pour le rayon donné.

PROBLÉME XII.

Trouver le nombre de degrés correspondants à une tangente donnée, pour un rayon donné.

Solution.

Ouvrez la double ligne des moindres tangentes en sorte que la distance des numéro 45 soit égale à la tangente, puis cherchez deux numéro identiques dont l'intervalle soit égal au rayon donné; ces numéro donneront le complément du nombre de degrés correspondants à la tangente.

PROBLÉME XIII.

Trouver le nombre de degrés correspondants à une sécante donnée, pour un rayon donné.

Solution.

Portez la sécante donnée transversalement entre les numéro 90 de la double ligne des sinus, et cherchez deux nu-

méro dont la distance soit égale au rayon; prenant alors le complément à 90° du nombre de degrés qu'ils indiquent, on aura celui des degrés correspondants à la sécante donnée.

Problême XIV.

Etant donnée la longueur du sinus, de la tangente et de la sécante, avec le nombre de degres correspondants, trouver la longueur du rayon.

Solution.

Portez la ligne donnée transversalement entre les degrés donnés, pris sur les échelles convenables : alors la longueur du rayon sera donnée, *pour le sinus*, par la distance 90, 90;

Pour la tangente, par la distance des numéro 45, pris vers l'extrémité ou le centre du secteur, suivant que le nombre de degrés sera plus petit ou plus grand que 45;

Et pour la sécante, par la distance

o,o, à l'origine des sécantes vers le centre du secteur.

PROBLÈME XV.

Un rayon étant donné avec le sinus, la tangente ou la sécante, trouver les degrés correspondants.

Solution.

On suppose ici que la tangente et la sécante données puissent être contenues dans l'ouverture déterminée en plaçant le rayon entre les numéro 45 de la ligne des tangentes ou o de celle des sécantes.

Le compas étant ouvert en sorte que les distances 90, 90; 45, 45; o, o, soient égales au rayon donné, on cherchera deux numéro identiques dont l'intervalle rende la ligne donnée; ces numéro ainsi trouvés donneront les degrés et parties de degré correspondants à la ligne donnée.

PROBLÈME XVI.

Trouver la longueur du sinus verse d'un nombre donné de degrés, pour un rayon donné.

Solution.

Faites la distance des numéro 90, pris sur la ligne des sinus, égale au rayon donné; prenez ensuite celle des compléments du nombre de degrés proposé : alors, suivant que ce nombre sera plus grand ou plus petit que 90°, le sinus verse sera donné par la somme ou la différence du cosinus et du rayon.

PROBLÈME XVII.

La base et la perpendiculaire d'un triangle rectangle étant données, trouver l'hypoténuse.

Solution par le secteur.

Fig. 54. Supposons la base AC = 40 milles et la perpendiculaire AB = 30; ouvrez l'instrument en sorte que la double ligne des

lignes fasse un angle droit; puis prenez quarante parties sur une de ces lignes et trente parties sur l'autre : alors la distance 30, 40, portée sur la ligne des parties égales, sera trouvée contenir cinquante de ces parties.

Par le calcul.

Désignant par x l'hypoténuse, on a

$$x^2 = \overline{30}^2 + \overline{40}^2 = 2500$$
$$\text{et } x = 50.$$

PROBLÈME XVIII.

Etant donnée la perpendiculaire AB = 30 d'un triangle rectangle ABC et l'angle BCA = 37°, trouver l'hypoténuse BC.

Solution par le secteur.

Faites la distance des numéro 37, pris sur la ligne des sinus, égale à la ligne AB donnée; alors la distance parallele de 90 à 90 donnera l'hypoténuse BC, laquelle, portée du centre sur la ligne *Idem.*

des parties égales, tombera un peu au-delà de 49. (1)

Par le calcul.

log. 30 = 1,4771213

log. sin. 37° = $\bar{1}$,7794630

diff. = 1,6976583 = log. 49,849.

PROBLÊME XIX.

L'hypoténuse et la base étant données, trouver la perpendiculaire.

Solution.

Idem. Ouvrez l'instrument en sorte que la double ligne des lignes soit à angle droit; alors prenez, à partir du centre, le nombre de parties contenues dans la base, et de l extrémité de cette longueur, comme centre, et avec l'hypoténuse pour rayon, décrivez sur l'autre jambe

(1) Je dois prévenir que j'ai résolu ces problêmes avec un compas de proportion d'*Adams*, qui est divisé avec une exactitude telle que mes résultats se trouvent d'accord avec ceux du calcul, à une légere différence près.

un arc de cercle dont l'intersection avec la ligne des lignes donnera le nombre de parties contenues dans la perpendiculaire. En effet, qu'on suppose l'hypoténuse = 50 et la base = 40, on trouvera que le point d'intersection tombe sur le n°. 30.

PROBLÈME XX.

L'hypoténuse étant donnée et l'angle ACB, trouver la perpendiculaire.

Solution.

Faites la distance des numéro 90, pris sur la ligne des sinus, égale à l'hypoténuse donnée, alors, désignant par *n* le nombre de degrés de l'angle ACB, la distance des n°. *n* donnera la longueur du côté AB. *Idem.*

PROBLÈME XXI.

La base et la perpendiculaire AB étant données, trouver l'angle BCA.

Solution par le secteur.

Idem. Portez CA sur l'une et l'autre ligne des lignes, à partir du centre, puis déterminez l'ouverture de compas en faisant la distance des numéro correspondants aux extrémités de CA égale à la perpendiculaire BA; alors la tangente de l'angle BCA sera donnée par la distance des numéro 200: on aura la mesure de l'angle BCA en portant cette dernière distance, à partir du centre, sur la ligne des tangentes, et comptant le nombre de degrés et parties de degré contenus dans cette longueur.

Application.

Soient CA =60 et BA=30; la distance des numéro 200 donnée par 60,60=30 mesurera sur la ligne des lignes un peu plus de 133 parties, et on trouve que l'angle correspondant à cette tangente est de 33° 40′.

Solution par le calcul.

On a la proportion

rayon (200) : tang. BCA :: 60 : 40,

donc

tang. BCA $= \frac{40}{60} \cdot 200 = \frac{2}{3} \cdot 200 = 133,33.$

PROBLÈME XXII.

Deux côtés étant donnés, avec l'angle compris, trouver le troisieme côté.

Solution.

Soient AC = 20, BC = 30, et l'angle ACB = 110°; ouvrez l'instrument jusqu'à ce que la double ligne des parties égales fasse un angle égal à l'angle donné, c'est-à-dire un angle de 110°; mettez les côtés donnés du triangle depuis le centre de l'instrument sur chaque ligne des lignes; la distance des extrémités sera la longueur du côté AB cherché. Fig. 35.

PROBLÈME XXIII.

Les angles CAB et ACB étant donnés, avec le côté CB, trouver le côté AB.

Solution par le secteur.

Idem. Soient CAB=50°, ACB=60°, et CB=40; faites la distance des numéro 50, pris sur la double ligne des sinus, égale à 40; alors celle des numéro 60 donnera la longueur du côté AB; et cette distance portée sur la ligne des parties égales, à partir du centre, mesurera 45 de ces parties.

Par le calcul.

On a la proportion

sin. 50° : CB :: sin. 60° : AB;

log. 40 = 1,6020600

log. sin. 60° = $\bar{1}$,9375306

som. = 1,5395906

log. sin. 50° = $\bar{1}$,8842540

diff. = 1,6553366 = log. 45,22.

PROBLÊME XXIV.

Les trois angles d'un triangle étant donnés, trouver le rapport entre les côtés.

Solution.

Prenez les sinus latéraux de ces différents angles et mesurez-les sur la ligne des lignes; les nombres répondants aux extrémités exprimeront les rapports cherchés.

PROBLÊME XXV.

Les trois côtés étant donnés, trouver l'angle ACB.

Solution.

Placez les côtés AC et CB sur l'une et *Idem.* l'autre ligne des lignes, à partir du centre, et écartez les extrémités de la longueur du troisieme côté AB; alors la distance des numéro 200, portée sur la ligne des sinus, à compter du centre, donnera le nombre de degrés et parties de degré de l'angle ACB.

Soient AC = 30, CB = 40, et AB = 20, on trouvera

ACB = 28° 30′.

Problème XXVI.

L'hypoténuse d'un triangle rectangle sphérique ABC est = 43°, et l'angle CAB = 20°, trouver le côté CB.

Solution.

Fig. 36. Prenez 20° avec un compas ordinaire sur la ligne des sinus depuis le centre, et mettez cette étendue transversalement de 90 à 90; le sinus parallele de 43°, valeur de l'hypoténuse donnée, étant mesuré depuis le centre sur la ligne des sinus, donnera 13° 30′ pour le côté cherché: c'est aussi ce qu'on trouvera en cherchant le quatrieme terme de la proportion

rayon : sin. 43° : : sin. 20° : sinus de la perpendiculaire CB.

PROBLÈME XXVII.

La perpendiculaire BC et l'hypoténuse AC étant données, trouver la base AB.

Solution.

Faites que le rayon, ou le sin. 90°, soit une distance transversale entre le nombre de degrés de la perpendiculaire donnée que je suppose = 76° 30'; alors le sinus parallele du complément de l'hypoténuse, par exemple de 47°, étant mesuré sur la ligne des sinus, sera trouvé = 49° 25' qui est le complément de la base cherchée, et par conséquent la base elle-même sera de 40° 35'; c'est en effet la valeur du quatrieme terme de la proportion cos. BC : rayon : : cos. AC : cos. AB. *Idem.*

PROBLÈME XXVIII.

Décrire sur une ligne BC un segment de cercle capable de contenir un angle donné.

Solution.

Coupez BC en deux parties égales au Fig. 37.

point A et par A tirez une perpendiculaire indéfinie DAE, puis ouvrez le secteur en sorte que la distance des n°. 45 de la ligne des tangentes soit égale à AC, et prenez la tangente parallele de la différence entre 90° et l'angle donné ; cette tangente portée, à partir du point A, du côté opposé aux segments lorsque l'angle donné surpasse 90°, et du côté des segments dans le cas contraire, donnera les centres D, F, G, H, etc. des segments cherchés, et les distances au point C en seront les rayons. Lorsque l'angle donné sera de 90°, A deviendra le centre du cercle et AC le rayon.

L'intersection de la ligne DE par un arc de segment est le centre d'un autre segment capable de contenir un angle moitié de celui du premier.

Démonstration.

Soient angle CIB = 80°, angle CRB = 40°, et G le centre du segment CIB, on aura

$$\text{arc BIC} = 360° - 160° = 200°;$$

donc $$\text{arc BI} = \frac{\text{BIC}}{2} = 100°;$$

ainsi l'angle BCM sera de 50° et l'arc BM de cent degrés, qui, ajoutés à MRC = 180°, donnent 280° dont le complément à 360° = 80°; l'angle CRB aura donc pour mesure $\frac{80°}{2}$ = 40° = $\frac{1}{2}$ angle CIB. Ainsi lorsque la différence entre 90° et le nombre de degrés de l'angle du segment ne se trouvera pas sur la ligne des tangentes, on commencera par décrire l'arc du segment capable du double de l'angle cherché, et de l'intersection de cet arc avec DE comme centre, et de la distance de cette intersection au point C comme rayon, on décrira l'arc du segment cherché.

Problême XXIX.

Décrire une ellipse dont les diametres transverses et conjugués sont donnés.

Solution.

AB et ED étant ces diametres, on ouvrira le compas de proportion en sorte que la distance des numéro 90 de la ligne des sinus soit égale au demi-diametre Fig. 38.

AC; alors on divisera AC en ligne de sinus, en portant de C vers A les distances paralleles de degré en degré, ou seulement de dix en dix degrés, prises à partir du centre du secteur, et par tous les points de division on élevera des perpendiculaires indéfinies : ceci fait, on fera la distance des numéro 90 égale au demi-diametre conjugué DC; puis prenant les distances paralleles, mais à compter de 90, aussi de 10 en 10 degrés, et les portant des extrémités des cosinus de part et d'autre de AC sur les perpendiculaires, on marquera les points M et *m*, R et *r*, P et *p*, etc. qui appartiendront à l'ellipse.

CHAPITRE

CHAPITRE VIII.

Echelles logarithmiques.

Définition.

Le compas de proportion étant ouvert de maniere à ne former qu'une seule regle droite, on trouve dans l'espace triangulaire formé par les moitiés des lignes des sinus et tangentes et l'arête du compas trois lignes marquées *tang.*, *sin.*, *nomb.* On les appelle *lignes logarithmiques*, parceque, dans chacune d'elles, la distance de l'origine à une division quelconque est le logarithme du nombre écrit au-dessus de cette division.

Logarithmique des nombres.

Construction.

On prendra une ligne à volonté pour représenter l'unité ou le logarithme de 10, et après l'avoir divisée en cent parties éga-

les, on portera, à compter de l'origine, trente de ces parties pour le logarithme de 2; quarante-huit pour celui de 3; soixante pour celui de 4, et ainsi de suite, comme on le trouve dans les tables; puis écrivant aux extrémités de ces distances les nombres 1, 2, 3, 4, etc. 10, on aura construit une *échelle logarithmique*. Pour pousser cette échelle jusqu'à 100, on n'aura plus qu'à porter, à compter de 10, les distances 1,2, 1,3, 1,4, etc. et écrire aux extrémités les nombres 2, 3, 4, etc., 1, qu'on prendra pour 20, 30, 40, etc. 100 : en effet les distances du nº. 10 aux nº. 20, 30, 40, etc. 100, représentant la partie décimale des logarithmes de ces nombres, puisque la caractéristique est la longueur 1,10, et cette partie décimale étant la même que celle des nombres 1, 2, 3, etc., les divisions entre 10 et 100 doivent être égales à celles comprises entre 1 et 10.

Pour rendre la ligne logarithmique des nombres d'un usage plus étendu, on pourra supposer que son origine soit

distante du n°. 1, le plus avancé vers la gauche, de toute la longueur 1,10; car alors le premier 1 deviendra 10, celui du milieu 100, celui de l'extrémité 1000; et les divisions du second ordre, qui ne servent que dans ce cas, représenteront des unités dans l'étendue 10,100, et des dixaines dans celle 100,1000, ce qui déterminera la valeur des autres numéro. On prouvera, comme ci-dessus, que deux divisions, prises à égale distance et à la droite des n°. 10 et 100, sont égales entre elles.

Démonstration.

La proportion

$$a : b : c : x$$

donne cette équation entre les logarithmes;

$$\log. x = \log. b + \log. c - \log. a,$$

$$\text{et } \log. x - \log. b = \log. c - \log. a.$$

Ainsi pour trouver, au moyen de l'échelle logarithmique, le nombre correspondant à log. x, on prendra entre les pointes d'un compas la distance de a à c, valeur du second membre de l'équation;

puis posant une des pointes sur le n°. *b*, l'autre portée à droite ou à gauche, selon qu'en partant de *a* il faut aller à droite ou à gauche pour rencontrer *c*, ira tomber sur le quatrieme terme de la proportion.

Lignes logarithmiques des sinus et tangentes.

Construction.

La construction *des lignes logarithmiques des sinus et tangentes* est absolument la même que celle de la ligne logarithmique des nombres ; dans ces deux lignes la distance de l'origine à 1° est = 8,242, comme on le trouve per les tables de logarithmes : au reste la solution des problêmes par ces lignes n'exige pas qu'on connoisse leur origine, puisqu'on n'a jamais besoin que des différences des logarithmes.

Dans la ligne des sinus, depuis 1d jusqu'à 10°, on a les logarithmes de 10 en 10 minutes ; depuis 10° jusqu'à 40°, de 30 en 30 minutes ; de 40° à 60°, de degré

en degré ; de 60° à 80°, de deux en deux degrés ; et de 80° à 90° on ne peut plus estimer qu'à l'œil. Dans celle des tangentes, de 1° à 10° on a les logarithmes de 10 en 10 minutes et seulement de 30 en 30 minutes dans le reste de la ligne.

Remarque.

Si les antécédents de la proportion étoient des sinus et les conséquents des tangentes ou des côtés, on exécuteroit la première partie de l'opération avec la logarithmique des sinus, et la seconde avec celle des tangentes ou des nombres.

Nous allons éclaircir tout ceci par des exemples.

Usage des logarithmiques.

PROBLÈME Ier.

Soit la proportion

$4^{T} : 18^{liv.} :: 32^{T} : x^{liv.}$

Après avoir mesuré, avec un compas, sur la logarithmique des nombres, la distance de 4 à 32, ou de 40 à 320 (dans ce dernier cas, le n°. 1 de l'origine est

pris pour 10, celui du milieu pour 100, et les divisions intermédiaires s'estiment en conséquence), on posera une des pointes sur 18, alors l'autre, ramenée vers la droite, tombera sur 144, valeur de *x*.

PROBLÈME II.

Soit la proportion

R : *hypoth.* (120^T) : : *sin.* 30° 17′ : x^T.

On prendra la distance de 90° à 30° 17′ sur la logarithmique des sinus, et posant une des pointes du compas sur le n°. 120 de la logarithmique des nombres, l'autre portée à gauche, parceque le quatrieme terme est plus petit que le second, ira rencontrer $60^T \frac{1}{2}$, longueur du côté cherché.

PROBLÈME III.

Soit la proportion:
Cos. de la latitude de 51° 30′ (sin. 38° 30′)
est au rayon;
comme le sinus de la déclinaison du soleil = 20° 14′,
est au sinus de l'amplitude.

Prenez sur la logarithmique des sinus la distance entre 38° 30′ et 20° 14, posant alors une des pointes du compas sur 90°, l'autre, ramenée vers la gauche, tombera sur 33° $\frac{3}{4}$ amplitude du soleil.

PROBLÈME IV.

On pourra encore, au moyen des lignes logarithmiques des sinus et tangentes, tracer les lignes horaires d'un cadran horizontal; car ce problême se réduit à trouver le quatrieme terme de la proportion suivante:

Sinus total,
est au sinus de la latitude;
comme la tangente de la distance du soleil

au méridien, pour une heure donnée, est à la tangente de l'angle horaire horizontal correspondant.

Supposons que la latitude soit celle de Paris = 48° 51′ et qu'on veuille tracer la ligne d'une heure; la proportion donnée plus haut deviendra

sin. 90° : tang. 15° : : sin. 48° 51′ : tang. *x*.

Pour avoir le quatrieme terme, on prendra sur la logarithmique des sinus la distance de 90° à 48° 51′, puis posant une des pointes du compas sur 15° de la logarithmique des tangentes, l'autre pointe, ramenée vers la gauche, ira rencontrer 11° 26′, valeur de l'angle formé par la méridienne et la ligne I^h, XI^h.

Remarque.

On peut se servir indifféremment de ces trois lignes ou de celles des sinus et tangentes pour résoudre ceux des problêmes proposés, page 135 et suivantes, qui dépendent de la recherche du quatrieme terme d'une proportion; c'est

même en cela, abstraction faite de la précision, que consiste la différence entre les solutions par ces lignes et par les nombres; car dans celles-ci il n'est pas indifférent d'employer les sinus et tangentes naturels ou leurs logarithmes.

CHAPITRE IX.

Lignes des longitudes.

Définition.

On trouve sur le secteur anglois deux lignes de même longueur, placées latéralement (1), l'une marquée *longitude* et l'autre *corde*; la premiere est divisée en soixante parties inégales, et la seconde l'est de degré en degré depuis 0° jusqu'à 90°. L'origine de l'une de ces deux lignes correspond à l'extrémité de l'autre, et réciproquement. La ligne des cordes ne sert, à proprement parler, que d'*index*, c'est-à-dire qu'elle fait trouver, comme nous le verrons plus bas, la valeur d'un degré de chaque parallele en parties du

(1) Nous avons représenté ces lignes à part, afin que, construites sur une plus grande échelle, la division en soit plus nette et que la figure 3 soit moins chargée.

degré équatorial, dontchacune vaut un *mille anglois*. (1)

Construction.

Pour trouver le nombre de milles équatoriaux contenus dans un degré de parallele à la latitude de 44° 12′, ou le rapport de ce degré à celui de l'équateur, on fera la proportion suivante :

le rayon de l'équateur = 1,
est à 1°, ou 60 milles ;
comme le rayon du parallele, ou cos. 44° 12′,
est au nombre de milles contenus dans un degré de ce parallele.

Ce quatrieme terme est = 43,02 milles ; si donc on fait correspondre le n°. 43 de la ligne des longitudes au n°. 44 $\frac{1}{4}$ de celle

(1) On trouve dans la nouvelle Encyclopédie, art. de Jean Bernoulli, le mille anglois = 5280 pieds anglois, ce que l'auteur donne pour 829ᵀ, 5. Dans un ouvrage traduit de l'anglois par M. de Prony, et qui a pour titre, *Description des moyens employés, pour mesurer la base de Hounslow-Heath*, la valeur du pied anglois, ou *foot*, est = 0,938306, ce qui donne 825,709 toises pour celle du mille anglois en

des cordes, il est clair que le nombre de milles équatoriaux contenus dans un degré de parallele sera donné par l'extrémité de la corde de la latitude. En substituant dans la proportion cos. 15°, cos. 60°, on trouvera 58 et 30 pour les quatriemes termes, donc aux n°. 15 et 60 de la ligne des cordes doivent correspondre les n°. 58 et 30 de celle des longitudes.

---

toises de France. M. de la Lande, *dans la nouvelle édition de son Astronomie*, *art.* 2650, fait le mille anglois = 830 toises. La réduction donnée par Bernoulli paroît fautive, puisqu'elle differe de la seconde, et même de celle qu'on déduiroit de 0p.,9386, valeur du pied anglois d'après Paucton. On ne peut pas prononcer sur la derniere, puisque M. de la Lande ne rapporte pas la longueur du mille.

Usage.

PROBLÈME I.

Un vaisseau, à la latitude de 44° 12′, court E. 79 milles, on demande la différence en longitude.

Solution.

Vis-à-vis le n°. $44\frac{1}{4}$ de la ligne des cordes, on trouve 43 sur celle des longitudes, ce qui indique que l'arc d'un degré à cette latitude est = 43 milles, ou qu'une différence de 43 milles sur ce parallele en donne une de 60 milles sur l'équateur; on a donc la proportion

$$43 : 60 :: 79 : x;$$

d'où $x =$ 110 milles, différence en longitude, laquelle évaluée en degrés est $= 1° 50'$.

Lignes de latitude et des heures.

On trouve encore, mais très rarement, sur le secteur, deux lignes placées latéralement, l'une marquée *latitude* et l'autre *heure*. Ces lignes s'emploient con-

jointement et servent à tracer les lignes horaires d'un cadran pour une latitude donnée. Nous ne décrirons ni leur construction ni leur usage, parcequ'on a des tables de tous les angles faits par la méridienne et les lignes horaires pour toutes les déclinaisons et les latitudes, (voyez la Trigonom. de Deparcieux), et que d'ailleurs ce probléme dépendant de la recherche du quatrieme terme d'une proportion, on peut le résoudre, soit par les lignes des sinus et tangentes naturelles, soit par les logarithmiques, comme nous en avons donné un exemple, page 151.

Nous allons terminer cette premiere partie par la solution d'un probléme qui se présente souvent dans l'arpentage.

PROBLÈME.

Etant donnée la position respective des trois points A, B, C, c'est-à-dire étant donnés les trois angles ABC, BCA, CAB, et la distance de ces points à un point intérieur D, ou DC, DB et DA, déterminer les longueurs des côtés AB, BC et AC.

Solution.

Après avoir construit un triangle EFG semblable au triangle ABC, on divisera (prob. II, page 17) les côtés EG en H et EF en I, en sorte qu'on ait les proportions Fig. 39.

EH : HG :: AD : DC,

et EI : IF :: AD : DB;

alors prolongeant indéfiniment les côtés EG, EF, on construira, au moyen de la ligne des parties égales, les quatriemes termes des proportions suivantes :

EH — HG : HG :: EH + HG : GK... (A)

EI — IF : IF :: EI + IF : FM...... (B).

Ceci fait, on partagera les lignes HK et IM en deux parties égales aux points

N et L, et de ces points, comme centres, avec LH et IN, décrivant deux cercles qui se couperont en O, on tirera les lignes EO, FO et GO, qui seront dans le même rapport que les lignes AD, BD, CD.

Actuellement il peut arriver trois cas; 1°. que les lignes EO, FO et GO soient égales aux lignes données AD, BD et DC; 2°. qu'elles soient plus petites; 3°. qu'elles soient plus grandes: dans le premier cas, les distances EF, FG et EG seront nécessairement celles qu'on cherche; dans le second, on prolongera les premieres jusqu'en P, R et Q, en sorte qu'elles deviennent égales aux secondes; alors les distances résultantes PR, RQ et QP seront celles des points donnés. D'après ce que nous venons de dire, on voit ce qu'il y auroit à faire dans le troisieme cas.

Remarque.

Il peut arriver 1°. qu'on ait en même temps EH = HG, et EI = IF; les centres L et N sont alors à une distance infinie des points H et I, et le point O est

donné par l'intersection de deux perpendiculaires en H et I sur les lignes EG, EF. En effet les proportions (A) et (B) donnent, pour ce cas,

$$GK = \frac{(EH+HG)HG}{o}$$

$$FM = \frac{(EI+IF)\cdot IF.}{o}$$

2°. Qu'on ait seulement EH = HG : ici le point O est déterminé par l'intersection d'un cercle et d'une perpendiculaire.
3°. Qu'on ait EH plus petit que HG ; la proportion (A) donne alors GK négatif, ce qui indique que le centre L doit tomber sur l'autre côté de la base prolongée. On doit dire la même chose du centre N dans le cas de EI moindre que IF.

TRAITÉ
DE LA DIVISION
DES CHAMPS.

L'OBJET de ce traité est d'enseigner à diviser un terrain en un certain nombre de portions égales, ou qui soient entre elles dans des rapports donnés : cette division s'opere par des paralleles à un des côtés du périmetre, ou par des lignes tirées d'un point pris dans la surface, sur un côté, sur le sommet d'un angle. Dans ce dernier cas, le point duquel partent les lignes de division est un puits, un cabinet, ou toute autre commodité appartenant au terrain.

Les problêmes auxquels la division des champs donne lieu peuvent se traiter de deux manieres : 1°. graphiquement, en levant d'abord le terrain et

effectuant ensuite la division sur le plan; 2°. par le calcul, en déterminant, au moyen des angles et des côtés donnés, les inconnues desquelles dépend la solution du problême. Ces deux especes de solutions se trouveront presque toujours réunies dans le cours de ce traité.

Cette seconde partie renferme trois chapitres. Le premier traite des figures à trois côtés; le second des figures à quatre côtés; enfin le troisieme des figures à un nombre quelconque de côtés, régulieres et irrégulieres.

CHAPITRE PREMIER.

De la division des triangles.

PROBLÊME PREMIER.

Diviser le triangle ABC en un nombre* n *de parties égales par des lignes tirées d'un des angles sur le côté opposé.

Construction.

POUR y parvenir on divisera un des Fig. 1.
côtés, celui BC par exemple, en un nombre n de parties égales, et du point A menant des lignes à tous les points de division, on aura un nombre n de triangles tous égaux entre eux, puisqu'ils auront même base et même hauteur.

Si les triangles devoient être dans des rapports donnés, on couperoit la base de maniere que ces rapports fussent ceux des divisions.

PROBLÈME II.

Diviser le triangle ABC en trois parties égales par des lignes menées parallèlement à un des côtés.

Solution.

Soient d'abord $n = 3$, et AHF, FHIG, GIBC, les trois surfaces cherchées, ou, ce qui revient au même,

Fig. 2.

$$T. AHF = \tfrac{1}{3} T. ABC,$$
$$T. AIG = \tfrac{2}{3} T. ABC.$$

Faisant $AF = x$, et $AG = x'$, les triangles semblables AHF, ABC donneront

$$T. AHF : T. ABC :: xx : \overline{AC}^2 \ldots (A)$$

posant $xx = AC \cdot y$,

la proportion (A) deviendra

$$T. AHF : T. ABC :: AC \cdot y : \overline{AC}^2 :: y : AC;$$

mais à cause de

$$T. AHF = \tfrac{1}{3} T. ABC,$$

on aura $y = \tfrac{1}{3} AC;$

donc $xx = AC \cdot \tfrac{1}{3} AC:$

ainsi x ou AF sera moyenne proportionnelle entre la ligne AC et le tiers de cette ligne.

Les

Les triangles AIG et ABC étant aussi semblables, on aura

T. AIG : T. ABC :: $x'x'$: $\overline{AC}^2$. . . . (B);

et faisant

$$x'x' = AC \cdot y',$$

T. AIG : T. ABC :: AC $\cdot y'$: $\overline{AC}^2$ :: y' : AC.

Mais

$$T.\ AIG = \tfrac{2}{3}\ T.\ ABC,$$

donc

$y' = \frac{2}{3}$ AC, et $x'x' =$ AC $\cdot \frac{2}{3}$ AC : d'où l'on voit que x', ou AG, doit être moyenne proportionnelle entre la ligne AC et les deux tiers de cette ligne. Ainsi, pour résoudre le problême proposé, on partagera le côté AC en trois parties égales, aux points D et E : puis cherchant deux moyennes proportionnelles, l'une entre AC et AE, l'autre entre AC et AD, on les portera, à compter du point A, sur AC; et menant par les extrémités F et G des paralleles au côté BC, on aura les trois triangles demandés.

Solution générale.

Plus généralement soit proposé de partager le triangle ABC en un nombre *n*

de parties égales : désignant par X, X′, X″, etc. les surfaces

$$\frac{ABC}{n},\ \frac{2}{n}\ ABC,\ \frac{3}{n}\ ABC;$$

et par x, x', x'', les côtés homologues à AC, on aura les proportions suivantes,

$$X : T.\ ABC :: x^2 : AC^2,$$
$$X' : T.\ ABC :: x'^2 : AC^2,$$
$$X'' : T.\ ABC :: x''^2 : AC^2,$$

lesquelles, posant

$x^2 = AC \cdot y,\ x'^2 = AC \cdot y';\ x''^2 = AC \cdot y'';$

deviendront

$$X : T.\ ABC :: y : AC,$$
$$X' : T.\ ABC :: y' : AC,$$
$$X'' : T.\ ABC :: y'' : AC;$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{AC}{n},\ y' = \frac{2}{n}\ AC,\ y'' = \frac{3}{n}\ AC, \text{ etc.}$$

$$\text{et } x^2 = AC \cdot \frac{1}{n}\ AC,\ x'^2 = AC \cdot \frac{2}{n}\ AC,$$

$$x''^2 = AC \cdot \frac{3}{n}\ AC, \text{ etc.}$$

Fig. 5. *Ainsi pour avoir les points de la ligne AC par lesquels il faut tirer les paralleles, on divisera le côté AC en un nom-*

bre n *de parties égales; puis décrivant une demi-circonférence qui ait ce côté pour diamètre, on élevera par chacun des points de division des ordonnées* 1, 1; 2, 2; 3,3; 4,4, *etc.; et les cordes* A 1, A 2, A 3, A 4, *etc. seront les valeurs de* x, x', x'', *etc.*

Remarque.

On voit qu'en portant, à compter du point A, les deux cordes qui correspondent à un même numéro, par exemple au n°. 1, on marquera les points de division des triangles dont les surfaces sont

$$\frac{ACB}{n} \text{ et } \frac{n-1}{n} ACB,$$

c'est-à-dire les points de division de deux triangles égaux en surface à celui qu'on divise.

PROBLÈME III.

Diviser le triangle ABC en deux parties égales par une perpendiculaire au côté AB.

Construction.

Fig. 4. Après avoir abaissé la hauteur CD du triangle, on cherchera une moyenne proportionnelle entre la base AB et la moitié du segment BD; et la portant de B vers A, on élevera par son extrémité E la perpendiculaire EF qui divisera le triangle en deux parties égales.

Démonstration.

Les triangles semblables CDB, FEB, donnent

$$BD : DC :: BE : EF;$$

multipliant les deux termes du premier rapport par AB et ceux du second par BE, on aura

$$BD \cdot AB : DC \cdot AB :: \overline{BE}^2 . EF : BE;$$

mais par la construction

$$BD \cdot AB = 2\overline{BE}^2,$$

donc

$$CD \cdot AB = 2 \cdot EF \cdot BE$$

$$\text{et } \frac{CD \cdot AB}{2} = EF \cdot BE.$$

Construction.

Pour construire la moyenne proportionnelle AB sur la figure donnée, on décrira une demi-circonférence AHB, et prenant le milieu G du segment BD, on menera l'ordonnée GH; puis du point B, comme centre, avec BH pour rayon, on décrira un arc dont l'intersection avec AB donnera le point E. En effet on a

$$\overline{BH}^2 = AB \cdot BG = AB \cdot \frac{BD}{2}.$$

Solution générale.

Plus généralement soit proposé de diviser le triangle ABC en un nombre n de parties égales suivant la condition énoncée plus haut; on partagera le segment BD en ce nombre n de parties égales, et de tous les points de division menant des ordonnées au demi-cercle, on décrira du point B, comme centre, avec les *Idem.*

cordes BH, des arcs dont les intersections avec le côté AB seront les points desquels partiront les perpendiculaires EF qui donneront les surfaces

$$\frac{ABC}{n}, \frac{2ABC}{n} \ldots \frac{n-1}{n} ABC.$$

Démonstration.

On doit avoir

$$\tfrac{1}{2}BE \cdot EF : \tfrac{1}{2}BA \cdot CD :: 1 : n;$$

et substituant pour EF sa valeur $\frac{DC.\ BE}{DC}$,

la proportion devient

$$\overline{BE}^2 : BA \cdot BD :: 1 : n;$$

d'où l'on tire

$$\overline{BE}^2 = BA \cdot \frac{BD}{n}$$

$$\text{et } BA : BE :: BE : \frac{BD}{n} \ldots \text{(A)}.$$

Remarque.

Cette solution suppose que le point F tombe toujours sur le côté BC. Lorsque la surface ACD surpasse $\frac{ABC}{n}$, ce qui arrive quand la surface donnée doit être partagée en plusieurs portions égales, on en conclut qu'un des points F tombe sur

le côté GA, et on a, pour déterminer E, l'équation

$$AE \cdot EF = \frac{1}{n} \text{T. ABC} = \frac{1}{n} AB \cdot DC,$$

laquelle, en substituant pour EF sa valeur

$$\frac{AE \cdot CD}{AD},$$

devient

$$AE^2 = \frac{1}{n} AB \cdot AD \ldots (B).$$

Soient T. AFE = C, T. ADC = B; si, après avoir soustrait C de B le reste surpasse encore $\frac{ABC}{n}$, il faudra chercher un nouveau point E qu'on trouvera par l'équation (B), en écrivant $\frac{2}{n}$ pour $\frac{1}{n}$. Dans le cas contraire, la ligne EF tombe dans la surface BCD, et le point E se détermine par la proportion (A), après avoir substitué $\frac{n-1}{n}$ BD à la place de $\frac{BD}{n}$.

PROBLÈME IV.

Diviser le triangle ABC en deux parties égales par une ligne menée du point D pris à volonté sur le côté BC.

Construction.

Fig. 5. Après avoir tiré la ligne DA, on lui menera par le point E, milieu de BC, une parallele qui ira rencontrer le côté AC en un point F, et la ligne DF donnera

$$\text{T. CDF} = \tfrac{1}{2}\,\text{T. ABC}.$$

Démonstration.

Soit menée la ligne AE, on aura

$$\text{T. BAE} = \tfrac{1}{2}\,\text{T. BAC}:$$

mais, par construction, AD est parallele à EF, donc

$$\text{T. DAE} = \text{T. ADF};$$

et ajoutant de part et d'autre T. BAD, on obtient

$$\text{T. BAE} = \text{ABDF} = \tfrac{1}{2}\,\text{T. BAC}.$$

Autre solution.

Soient $CB = a$, $CD = b$, la hauteur du triangle BAC $= h$, celle du triangle CFD $= x$; on doit avoir.

$$\frac{b}{2}x = \frac{a}{2} \cdot h,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{a \cdot h}{b}:$$

mais on a

$$\text{sin. BCA} : x :: 1 : \text{CF},$$

donc

$$\text{CF} = x \cdot \frac{1}{\text{sin. BCA}} = \frac{a \cdot h}{b} \cdot \frac{1}{\text{sin. BCA}};$$

quand $b = a$, on a

$$\text{CF} = \frac{h}{\text{sin. BCA}} = \text{CA}$$

ce qui doit arriver.

PROBLÈME V.

Diviser le triangle BAC en trois parties par des lignes tirées d'un point D pris sur le côté BC.

Construction.

Après avoir divisé la ligne BC en trois parties égales, aux points E et F, et mené la droite AD, on tirera par ces points de division des paralleles à AD qui rencontreront AB en deux points H et G; menant alors les lignes HD et GD, le trian- Fig. 6.

gle ABC se trouvera divisé en trois parties égales.

Démonstration.

Soient menées les lignes AE, AF ; on aura, à cause des paralleles GE et AD,

T. GAE = T. GDE ;

et, ajoutant aux deux membres le triangle BGE, on trouve

T. BAE = T. BGD = $\frac{1}{3}$ T. BAC,

par la même raison

T. AFD = T. ADH ;

et ajoutant à chaque membre T. DAC, il vient

T. FAC = AHDC = $\frac{1}{3}$ T. BAC;

donc aussi T. GDH = $\frac{1}{3}$ T. BAC.

Le point D peut être donné entre les points B et E, n°. 2, ou bien entre les points E et F, n°. 3 : il n'y a de différence entre la figure n°. 2, et celle n°. 1, qu'en ce que, dans la premiere, les points G et H, au lieu d'être sur le côté AB, tombent sur le côté AC. Faisant, dans la figure n°. 3, la construction prescrite plus haut, on a

T. AGE = T. GDE ;

donc

$$T. AGE + T. GBE = T. GDE + T. GBE,$$

$$\text{et } T. BAE = T. GDB = \tfrac{1}{3}T. ABC.$$

On démontreroit de la même maniere que

$$T. AFC = T. CHF = \tfrac{1}{3} T. BAC;$$

d'où on conclura que

$$AGDH = \tfrac{2}{3} T. BAC.$$

Lorsque le point D tombe sur le milieu de EF, il est clair que les lignes AG et AH sont égales entre elles.

Remarque.

Pour diviser le triangle BAC en deux fois plus de parties, on n'auroit qu'à partager les deux triangles en deux portions, comme nous l'avons enseigné plus haut, ainsi que le trapeze, comme nous l'enseignerons plus loin.

Corollaire.

On a donc un moyen de découvrir, *a priori*, quand les deux points G et H tomberont sur un seul côté ou sur les deux en même temps, et, dans le premier cas, sur lequel des côtés ces points doivent

se trouver; car pour cela, on n'a qu'à mesurer les longueurs CD et CB, et comparer la premiere au tiers ou aux deux tiers de la seconde.

PROBLÈME VI.

D'un point D pris dans la surface d'un triangle ABC mener trois lignes dont l'une aille à l'angle donné A, et qui partagent la surface en trois portions égales.

Construction.

Fig. 7. Après avoir fait BE $= \frac{1}{3}$ BC et tiré la ligne DE, on menera du point A une parallele AF à DE, puis prenant AG $= \frac{1}{2}$ AF, on tirera GH parallele à DC; joignant ensuite les points D et A, D et H, D et F, on aura

FDHC = T. ADH = ADFB $= \frac{1}{3}$ T. ABC.

Démonstration.

Soit prolongée la ligne ED jusqu'à la rencontre du côté AC en un point M, et soit menée la ligne AE, on aura

ABFD = T. ABE + T. AFD =

T. ABF + T. AFE = $\frac{1}{3}$ T. BAC.

Reste à démontrer que la surface ADFC est partagée en deux parties égales par la ligne DH; pour cela soit menée la ligne GC, ce qui donnera

T. AGC = T. FGC

ou AGOH + T. HOC = FGDOC + T. GDO. . . . .(A).

Mais T. HGC = T. GDH;

retranchant la partie commune HGO, il restera

T. HOC = T. GDO;

donc l'équation (A) se changera en celle-ci :

AGOH + T. GDO = FGDOC + T. HOC,

ou bien T. AGM + AMOH + T. MGD + T. MDO = T. FGD + FDOC + T. HOC. Mais T. AGM + T. MGD = T. AGD = T. FGD, donc AMOH + T. MDO = T. HOC + FDOC, et enfin T. ADH = FDHC = $\frac{1}{3}$ T. ABC. C. Q. F. D.

Autre solution.

Soient T. ABC = A, et T. ADC = B; Fig. 8.

lorsqu'on aura $B > \frac{1}{3}A$, le point H tombera sur le côté AC, et on déterminera la longueur AH par l'équation

$$AH \cdot Dh' = \tfrac{1}{3} AC \cdot Bh, \ldots\ldots (A)$$

de laquelle on tire

$$AH = \frac{1}{3 \sin. DAC} \times \frac{AC \cdot Bh}{AD}$$

en mettant dans l'équation (A) pour Dh' sa valeur AD sin. DAC. Dans le cas de $B < \frac{1}{3}A$, le point H tombe sur le côté BC, et on trouve

$$CH' = \frac{2}{\sin. DCB} \times \frac{1}{3} \frac{A - B}{DC} \ldots (B).$$

Supposons le point H au-dessus de DC, et soient T. HDC = C, T. CDF = D; on aura

$$D = \tfrac{1}{3}A - C = \tfrac{1}{3}A - (B - \tfrac{1}{3}A) = \tfrac{2}{3}A - B,$$

et l'équation

$$CF' \cdot Dh'' = \tfrac{1}{3} BC \cdot Ah'''$$

donnera, en substituant pour Dh'' sa valeur DC sin. DCB,

$$CF = \frac{1}{3 \sin. DCB} \times \frac{BC \cdot Ah'''}{CD}$$

On connoît la surface HDC = $B - \frac{1}{3}A$,

le point D est donné de position, on peut mesurer les lignes DC et DB, ainsi que les angles DCB et DBC; on a donc tout ce qu'il faut pour calculer la surface BDHC; comparant cette surface avec $\frac{1}{3}$ A, on saura d'avance sur lequel des deux côtés BC ou BA doit tomber le point F, qu'on déterminera aisément d'après ce que nous venons de dire.

PROBLÈME VII.

Etant donné un triangle ABC, trouver dans sa surface un point F tel que les lignes tirées de ce point aux trois angles partagent le triangle en trois parties égales.

Construction.

Après avoir pris BD = $\frac{1}{3}$ BC, on tirera la ligne DE parallele à BA; et du point F, milieu de DE, menant FA, FB, FC, le triangle BAC sera divisé en trois portions égales. Fig. 9.

Démonstration.

1°. Les deux triangles AFB, ABD, ont même base et même hauteur, donc

$$T.\ AFB = T.\ BAD = \tfrac{1}{3}\ T.\ BAC.$$

2°. Par construction DF = FE, donc

$$T.\ CFE = T.\ CFD;$$

d'un autre côté on a

$$T.\ AFE = T.\ BFD;$$

ajoutant ces deux équations membre à membre, on trouve

$$T.\ CFA = T.\ CFB = \tfrac{1}{3}\ T.\ ABC.$$

C. Q. F. D.

Autre solution.

Fig. 10. Soient AH, BH′, Fh, Fh', les hauteurs des triangles ABC, BFC, AFC; le point de départ des lignes de division étant supposé en F, on doit avoir les deux équations

$$BC \cdot Fh = \tfrac{1}{3}\ BC \cdot AH,$$
$$AC \cdot Fh' = \tfrac{1}{3}\ AC \cdot BH',$$

d'où l'on tire

$$Fh = \tfrac{1}{3}\ AH,$$
$$Fh' = \tfrac{1}{3}\ BH'.$$

Construction.

Après avoir mené les hauteurs AH et BH′ du triangle ABC, on prendra, à compter des points H et H′, les parties HF′, HF″, égales au tiers de ces hauteurs; tirant alors par ces points des paralleles aux côtés BC et AC, l'intersection de ces lignes sera le lieu du point F cherché.

Mais comme cette construction ne seroit pas d'une exécution facile sur le terrain, nous allons en donner une autre beaucoup plus commode.

Soient des points L, L′; G, G′ abaissées des perpendiculaires LH″, L′H‴; GH^{IV}, G′H^{V} : on aura les proportions

$$\sin. B : LH'' \left(\tfrac{1}{3} AH\right) :: 1 : LB = \frac{\tfrac{1}{3} AH}{\sin. B},$$

$$\sin. C : L'H''' \left(\tfrac{1}{3} AH\right) :: 1 : CL' = \frac{\tfrac{1}{3} AH}{\sin. C},$$

$$\sin. A : GH^{\text{IV}} \left(\tfrac{1}{3} BH'\right) :: 1 : AG = \frac{\tfrac{1}{3} BH'}{\sin. A},$$

$$\sin. C : G'H^{\text{V}} \left(\tfrac{1}{3} BH'\right) :: 1 : CG' = \frac{\tfrac{1}{3} BH'}{\sin. C}.$$

Portant des points B et C les longueurs

BL et CL′ et des points A et C celles AG et CG′, on tracera les lignes LL′, GG′, dont l'intersection donnera le point F.

PROBLÈME VIII.

Etant donné un triangle ABC, en retrancher un qui soit égal en surface au triangle ECD, et qui, de plus, renferme l'angle ACB.

Construction et Démonstration.

Fig. 11. Après avoir fait sur CD un angle CDM = BCA, on menera du point E et parallèlement à CD une ligne qui rencontrera DM en un point F, et tirant CF, on aura un triangle FDC qui sera celui à retrancher. On achevera la construction en prenant sur CB une partie CI = DC et sur CA une partie CH = DF, et menant la ligne IH : car alors les triangles HCI, FDC, seront égaux en surface, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux.

donnée prob.
H se change.

1
in. C'

X.

un des côtés
en retranche

retrancher du Fig. 12.
cherché deux
, l'une HI
ur AF, l'au-
hauteur EG,
e proportion-
M, AB, et la
t A, sur la li-
extrémité N

donc alors

$$FD = CH.$$

D'où l'on voit que la premiere solution ne donne qu'un cas particulier du problême que nous venons de résoudre.

PROBLÊME IX.

Du triangle ABC retrancher un triangle égal en surface à CDE, par une ligne tirée de l'angle B.

Construction.

Idem. Après avoir fait la même construction que dans le problême précédent et tiré BH, on menera du point I une ligne IG qui lui soit parallele; et joignant les points B et G, le triangle CBG sera celui qu'on avoit à soustraire.

Démonstration.

$$T.\ BGI = T.\ IGH;$$

ajoutant de part et d'autre T. CIG, on aura

$$T.\ BGC = T.\ CIH = T.\ CDE.$$

Remarque.

Si dans l'équation (A), donnée prob. VIII, on fait $CI = CB$, CH se changera en CG et on aura

$$CG = \frac{CD \cdot EH'}{CB} \cdot \frac{1}{\sin. C}$$

PROBLÈME X.

Mener parallèlement à un des côtés d'un triangle une ligne qui en retranche un triangle donné.

Construction.

Soit ECD le triangle à retrancher du triangle ABC; après avoir cherché deux moyennes proportionelles, l'une HI entre la base BC et la hauteur AF, l'autre LM entre la base CD et la hauteur EG, on cherchera une quatrieme proportionnelle aux trois lignes HI, LM, AB, et la portant, à compter du point A, sur la ligne AB, on tirera par son extrémité N Fig. 12.

une parallele NO à BC; et le triangle ANO, ainsi formé, sera celui à retrancher.

Démonstration.

La proportion

$$HI : LM :: AB : AN$$

donne

$$\overline{HI}^2 : \overline{LM}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{AN}^2 \ldots (A).$$

Substituant à la place de $\overline{HI}^2$ et $\overline{LM}^2$ les valeurs BC. AF; CD. EG, et au rapport de $\overline{AB}^2$ à $\overline{AN}^2$ celui des triangles ABC, ANO, qui lui est égal, la proportion (A) se changera en celle-ci

BC . AF : CD . EG :: T. ABC : T. ANO,

et divisant par 2 les deux termes du premier rapport, on aura

T. BAC : T. CED :: T. BAC : T. ANO;

donc

T. CED = T. ANO.

Autre solution.

De la double condition que NO doit être parallele à BC et que T. ANO = T. ECD, il resulte qu'on doit avoir

$$NO : BC :: AN : AB;$$

d'où $$AN = \frac{AB.NO}{BC} \quad (A)$$

$$\text{et } NO . Af = CD . EG,$$

$$\text{ou, parceque } Af = \frac{AN.\ AF}{AB},$$

$$NO . \frac{AN . AF}{AB} = CD \cdot EG;$$

équation qui donne

$$AN = \frac{AB.CD}{NO} \times \frac{EG}{AF} \ldots (B):$$

mettant pour NO sa valeur $\frac{AN . BC}{BA}$ tirée de l'équation (A) et multipliant les deux membres par AN, on trouve

$$\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 . \frac{CD . EG}{BC . AF},$$

équation qui rend la construction que nous venons de décrire.

PROBLÈME XI.

Partager la surface d'un triangle en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 40, 20 et 10, *avec cette condition que les lignes de division partent de l'angle donné C.*

Construction.

Fig. 13. Au rapport des nombres 40, 20 et 10, on peut substituer celui des nombres 4, 2 et 1 dont la somme = 7; ainsi, pour résoudre ce problême, on divisera AB en 7 parties égales, et du point C menant des lignes aux points *a* et *b*, lieux des 4[e] et 6[e] divisions, on aura

T. ACB : T. *a*C*b* : T. *b*CB :: 4 : 2 : 1.

Supposons AB = 28 toises; pour trouver le nombre de toises contenues dans les segments A*a*, *ab*, *b*B, on fera la proportion

$$7 : 4 :: 28 : Aa = 16;$$

donc $ab = 8$ et $bB = 4$ toises.

Soit la surface du triangle ABC = 26, 5 arpents,

arpents, on aura la quantité de ceux que contiennent les autres triangles par la proportion

7 : 26, 5 : : 4 : 15, 143 = T. AC*a*,
7 : 26, 5 : : 2 : 7, 572 = T. *a*C*b*,
7 : 26, 5 : : 1 : 3, 786 = T. *b*CB.

PROBLÈME XII.

Diviser le triangle ACB en deux parties qui soient entre elles dans la raison de 2 à 5, avec cette condition que la ligne de division parte du point donné b.

Construction.

Divisez BC en 7 parties égales, prenez Fig. 14.
B*a* = 5 de ces parties et tirez la ligne A*a* qui donnera

T. A*a*B : T. AC*a* : : 5 : 2.

Reste donc à transformer le triangle BA*a* en un autre qui lui soit égal en faisant partir la ligne de division du point donné *b*; pour cela on menera du point A

une parallele Ac à la ligne ab, et la ligne bc déterminera la surface AB cb=T. Aab.

Remarque générale.

Les problêmes qu'on peut se proposer sur la division des triangles sont donc d'une seule espece; car il s'agit de diviser un triangle en un certain nombre de portions égales, ou de le diviser en portions qui soient entre elles dans des rapports donnés : or, dans ce dernier cas, on commence à partager en portions égales, dont la somme égale $m + n + p +$ etc.; m, n, p, etc. étant les termes des raisons données; puis ajoutant m, n, p, etc. de ces parties, le problême est résolu. Si, comme il arrive souvent, on est assujetti à faire partir les lignes de division d'un point donné, alors on n'a plus qu'à mener de ce point des lignes qui déterminent des triangles égaux aux premier

CHAPITRE II.

De la division des quadrilateres.

PROBLÊME I.

Diviser le parallélogramme AB CD en un nombre quelconque de parties égales par des paralleles au côté AD.

Construction.

Soit n le nombre des portions demandées; on partagera le côté AB en un nombre n de parties égales, et par tous les points de division menant des paralleles au côté AD, le probléme sera résolu. Pour avoir les valeurs en toises de AE, AF, etc. DG, DH, etc., on divisera le nombre de toises des côtés AB et DC par n, et on multipliera le quotient par 2, 3, 4, etc. $n - 1$. Fig. 15.

PROBLÈME II.

Diviser le parallélogramme ABCD en trois parties égales, avec cette condition qu'une des lignes de division parte de l'angle A.

Construction.

Fig. 16. Faites $CE = BF = \frac{1}{3} AB$; puis menez les lignes FE et AE, lesquelles diviseront la surface donnée en trois parties égales.

Démonstration.

Désignant par h la hauteur du parallélogramme, on a

$$\text{T. ADE} = \frac{\text{DE.}}{2} h = \tfrac{1}{3} \text{DC.} h = \tfrac{1}{3} \text{ABCD}$$

$$\text{et T. ADE} = \text{T. AEF;}$$

$$\text{donc aussi} \quad \text{EFBC} = \tfrac{1}{3} \text{ABCD},$$

PROBLÈME III.

Diviser le trapeze ABCD en un nombre n de portions égales par des lignes menées entre les côtés paralleles.

Construction.

On divisera les côtés paralleles en un nombre n de parties égales; joignant les points G et E, H et F, etc., le problême sera résolu. Fig. 17.

Démonstration.

T. DAE = T. EGF,
et T. AEG = T. GFH;
donc ADEG = GEFH;
et ainsi des autres.

PROBLÈME IV.

Diviser le parallélogramme ABCD en trois parties, en faisant partir la premiere ligne de division d'un point pris sur un des côtés.

Construction.

Fig. 18. Soit E le point donné; après avoir fait $AF = FG = \frac{1}{3} AB$, et mené FH parallele à AD, on prendra $DI = EG$; et joignant les points E et I, on aura

$$AEID = \frac{1}{3} ABCD.$$

Faisant ensuite $IK = \frac{1}{2} IC$, $EL = \frac{1}{2} EB$, et menant KL, on aura

$$IELK = KLBC = \frac{1}{3} DABC.$$

Démonstration.

Par construction $DI = EG$, et $DH =$, FG; retranchant la deuxieme équation de la premiere, on aura $HI = EF$ et T.HOI=T.EOF; ajoutant à chaque membre la surface AEOHD, on trouvera AEID $= AFHD = \frac{1}{3} ABCD$. A cause de $IK = KC$ et de $EL = LB$, on aura T. EIL = T. LKB, et T. ILK = T. KBC, et ajoutant ces deux équations membre à membre, ELKI = KLBC.

Autre solution.

On doit avoir $AEID = \frac{1}{3} ABCD$, ou $DI + AE = \frac{2}{3} DC$, et $DI = \frac{2}{3} DC - AE$,

ce qui rend la construction. Pour résoudre de la même maniere la seconde partie du problême, supposons qu'on se donne EL et qu'on cherche la longueur de IK; la ligne LK devant partager le trapeze EBCI en deux parties égales, on aura

$$IK + EL = KC + LB.$$

Substituant pour KC sa valeur $CI - IK$, et dégageant IK, cette équation se change en celle-ci :

$$2.\ IK = CI + LB - EL,$$

laquelle, dans le cas de $LB = EL$, donne

$$IK = \frac{CI}{2},$$ comme nous venons de le voir.

Remarque.

La seconde partie de la construction fournit un moyen de diviser la surface du trapeze en un nombre quelconque de parties égales.

Le point E peut tomber entre F et G ou entre G et B : dans l'un et l'autre cas on fera la même construction; seulement dans le second on en exécutera la pre-

miere partie du côté de BC et la seconde du côté de AD.

PROBLÈME V.

Diviser le parallélogramme ABCD en trois parties par deux lignes tirées d'un des angles.

Construction.

Fig. 19. Après avoir pris $CE = \frac{2}{3}$ CD et tiré AE, on tracera la diagonale BE sur laquelle on prendra $BM = \frac{1}{2}$ BE, et menant par M une parallele MG à l'autre diagonale AC et du point A la ligne AG, le parallélogramme sera divisé en trois parties égales.

Démonstration.

On a vu, problême II, que

$$T.\ ADE = \frac{1}{3}\ ABCD;$$

reste donc à prouver qu'on a

$$T.\ ABG = AECG.$$

Pour cela soit menée la ligne MC qui rencontrera AG en un certain point O; la construction donne

$$T.\ AMC = T.\ AGC;$$

retranchant la partie commune AOC, il

reste $\quad$ T. AMO = T. COG;

et ajoutant de part et d'autre d'abord le trapeze AOCE, en suite la surface ABMOG, il vient

$$AMCE = AGCE.$$

$$T.\ ABG = ABCM.$$

Mais les deux équations

$$T.\ AMB = T.\ AME$$

$$T.\ BMC = T.\ CME$$

ajoutées membre à membre donnent

$$ABCM = AMCE;$$

donc $\quad AGCE = T.\ ABG = \frac{1}{3}\ ABCD.$

Autre solution.

On doit avoir T. AED $= \frac{1}{3}$ ADCB, ou, menant la hauteur AH′ de ce triangle qui est aussi celle du parallélogramme, *Idem.*

$$DE \cdot AH' = \tfrac{1}{3}(DC + AB)\, AH',$$

d'où l'on tire

$$DE = \tfrac{1}{3}(DC + AB) = \tfrac{2}{3}\ DC.$$

Supposant ensuite que la ligne AG soit celle qui divise le trapeze AECB en deux parties égales, on a, pour trouver le point G, l'équation

$$T.\ CEA + T.\ CAG = T.\ GAB,$$

et menant AH perpendiculaire sur B C,

$$CE \cdot AH' + CG \cdot AH = GB \cdot AH;$$

mettant dans cette équation pour GB sa valeur BC — CG et dégageant CG, on trouve

$$CG = \frac{BC}{2} - \frac{CE \cdot AH'}{2\,AH} = \frac{BC}{2} - \frac{CD \cdot AH'}{6\,AH}$$

Remarque.

Lorsque le parallélogramme se change en un rectangle, AH′ = AH, et

$$CG = \frac{BC}{2} - \tfrac{1}{6}\,CD = \tfrac{1}{3}\,BC,$$

où bien

$$BG = \tfrac{2}{3}\,BC:$$

ce qui doit arriver; car, dans ce cas, BG = DE.

PROBLÈME VI.

Diviser le parallélogramme ABCD en trois parties par des lignes tirées d'un point pris sur un des côtés.

Remarque.

Fig. 18. Puisque les lignes de division doivent partir d'un seul point, on apperçoit aisément que la construction doit se com-

poser de la premiere partie de celle du probl. IV et de la seconde partie de celle du probl. V. Car la surface ADIE étant déterminée, il reste à partager le trapeze EBCI en deux parties par une ligne tirée de l'angle E.

Problème VII.

Diviser un trapeze en deux parties égales par une ligne tirée d'un des angles.

Nous renvoyons pour la construction et la démonstration au probl. V de ce chapitre.

Problème VIII.

Diviser le trapeze ABCD en deux parties égales par une ligne droite tirée du point E milieu du côté AB.

Construction.

Après avoir mené par le point D une parallele DF au côté AB et divisé cette Fig. 20.

ligne en deux parties égales au point G, on tirera par ce point une parallele GH à la ligne EC, et joignant les points E et H, le trapeze ABCD sera divisé en deux parties égales.

Démonstration.

On a par construction

T. EGC = T. EHC;

retranchant la partie commune EOC, il reste

T. GEO = T. CHO . . . . . (A);

mais DF étant parallele à AB,

ADGE = EGFB :

ajoutant au premier membre le triangle DGC et au second celui CGF, il vient

AEGCD = EGCFB,

ou

AEGOHD + T. COH = EOCFB + T. GEO . . . (B).

Des équations (A) et (B) on déduit

ADHE = EBCH.

Autre solution.

Idem. Soit EH la ligne qu'on suppose diviser

le trapeze ADCB en deux parties égales, et soient menées les diagonales HA, HB; à cause de AE = BE, on a T. AHE = T. EHB; donc on doit avoir T. ADH = T. BHC, ou, menant les hauteurs Ah et Bh' de ces triangles,

$$DH \,.\, Ah = CH \,.\, Bh' \ldots (A).$$

Faisant CD $= a$, Ah $= h$, Bh' $= h'$, DH $= x$, d'où CH $= a - x$, l'équation (A) devient

$hx = (a - x)h'$, d'où l'on tire $x = \frac{a\,h''}{h + h}$;

dans le cas d'un quarré, $h' = h = a$, et

$$x = \frac{aa}{2a} = \tfrac{1}{2}a,$$

comme cela doit être.

Construction.

Ainsi pour avoir x, on cherchera une quatrieme proportionnelle au côté qui renferme l'inconnue, à la hauteur de celui des trapezes qui renferme la différence de ce côté à la ligne x et à la somme des hauteurs des trapezes.

PROBLÈME IX.

Diviser le trapeze BADC en deux parties égales par une ligne tirée d'un point E, pris à volonté sur le côté DC.

Construction.

Fig. 21. Après avoir tiré la diagonale DB, on lui menera du point C une parallele CF; puis prenant AG $= \frac{1}{2}$ AF, et menant EG, et du point D une parallele DH, on tirera EH qui divisera la surface du trapeze en deux portions égales.

Démonstration.

Par la construction

T. BDF = T. BDC;

ajoutant de part et d'autre le triangle BDA, on a

T. ADF = ABCD.

Les lignes DH et EG étant paralleles,

T. GDH = T. EHD;

donc

T. GDH+T. AHD=T. EHD+T. AHD,

ou $T.\ ADG = AHED$:

mais

$$T.\ ADG = \tfrac{1}{2}\ T.\ ADF = \tfrac{1}{2}\ ABCD;$$

donc

$$AHED = \tfrac{1}{2}\ ABCD.$$

Autre solution.

Puisque le point E est donné de position, on pourra calculer la surface du triangle DAE; et désignant cette surface par B et celle du trapeze par A, on trouvera la ligne AH par l'équation *Idem.*

$$B + \tfrac{1}{2}\ EA \cdot AH \cdot \sin.\ EAH = \tfrac{1}{2}\ A,$$

de laquelle on tire

$$AH = \frac{\tfrac{1}{2}\ A - B}{\tfrac{1}{2} EA \sin.\ EAH} = \frac{A - 2\ B}{EA \cdot \sin.\ EAH} (A).$$

Supposons que le trapeze se change en un quarré et que $DE = \frac{DC}{2} = \frac{1}{2}\ a$, on aura $A = a^2$, $2\ B = \frac{1}{2}\ a^2$, $EA.\ \sin.\ EAH = a$, et l'équation (A) se changera en celle-ci

$$AH = \tfrac{1}{2}\ a,$$

comme nous l'avons trouvé plus haut. Si l'on fait $DE = o$, ou si l'on suppose que le point E soit en D, alors 2 B devient

$= o$ et AH $= a$, c'est-à-dire que la ligne de division est la diagonale du quarré.

Remarque.

On voit que le problême précédent n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

PROBLÊME X.

Diviser le quadrilatere ABCD en deux parties égales par une ligne parallele à un de ses côtés.

Construction.

Fig. 22. Après avoir prolongé le côté DC jusqu'à la rencontre de celui AB en un point R, on décrira un demi-cercle AOR; puis menant la diagonale DB, et du sommet de l'angle C une ligne CE qui lui soit parallele, on prendra AF $= \frac{1}{2}$ AE, et du point F on élevera l'ordonnée FO: ceci fait, du point R comme centre, avec RO pour rayon, on décrira l'arc

OH; tirant enfin par H une parallele HI au côté AD, le quadrilatere sera partagé en deux parties égales.

Démonstration.

Les deux triangles BDC, BDE, sont égaux, comme ayant même base et même hauteur; ajoutant à chacun d'eux le triangle BDF, on aura BCDF = T. EDF = $\frac{1}{2}$ ABCD; mais les triangles semblables ADR, HIR, donnent

$$T. ADR : T. HIR :: \overline{AR}^2 : \overline{HR}^2;$$

ainsi, posant la proportion

$$AR : RF :: AR \cdot AR : RF \cdot AR,$$

qui, en substituant pour AR . RF sa valeur $\overline{RH}^2$, devient

$$AR : RF :: \overline{AR}^2 : \overline{RH}^2,$$

on trouvera celle-ci

$$T. ADR : T. HIR :: AR : RF \ldots (A).$$

Comparant ensuite les deux triangles ADR, FDR, qui ont même hauteur, on aura

$$T. ADR \cdot T. FDR :: AR : RF \ldots (B).$$

Des proportions (A) et (B) on déduit

T. HIR = T. FDR, et retranchant la partie commune CBR, il reste

$$HICB = FDCB = \frac{1}{2} ADCB.$$

Remarque.

On pourroit d'abord changer le quadrilatere donné en un trapeze de même surface, qu'on diviseroit ensuite suivant la condition énoncée plus haut; mais nous observerons qu'il y a deux manieres de résoudre ce problême : la premiere, qui consiste à faire varier deux côtés du quadrilatere, ne peut pas être employée ici, parceque la surface donnée augmentant dans un sens et diminuant dans l'autre, quoiqu'elle reste néanmoins égale au premier, la ligne de division de la figure variée seroit trop grande ou trop petite pour la figure donnée : nous aurons donc recours à la seconde transformation qui ne présente pas l'inconvénient dont nous venons de parler.

Soit donc le quadrilatere ABCD qu'on propose de transformer en un trapeze de même surface.

Construction.

Après avoir prolongé les côtés AD et BC jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point E, on prendra, à compter du point E, une partie EF qui soit le 4e terme de la proportion Fig. 23.

$$BE : AE :: CE \cdot DE : \overline{EF}^2;$$

puis tirant CF et par le point D une ligne DG qui lui soit parallele, on menera FG qui donnera le trapeze BAFG égal au quadrilatere ABCD.

Démonstration.

1°. Les lignes DG et FC étant paralleles,

$$T. DCF = T. GFC;$$

et ajoutant ABCF de part et d'autre, on aura ABCD = ABGF. 2°. Les triangles semblables EFC, EDG, donnent

$$EF : EC :: ED : EG; \text{ d'où } EF \cdot EG = EC \cdot ED,$$

et conséquemment

$$EF \cdot EG : \overline{EF}^2 :: EC \cdot ED : \overline{EF}^2.$$

Divisant les deux termes du 1er rapport par EF, cette proportion devient

$$EG : EF :: EC . ED : \overline{EF}^2;$$

or la construction donne

$$EC : ED : \overline{EF}^2 :: EB : EA;$$

donc

$$EG : EF :: EB : EA;$$

donc la ligne FG, ainsi déterminée, est parallele au côté AB. Cette transformation faite, le problême devient très facile à résoudre.

Autre solution.

Fig. 22. Soient Hh' et Dh perpendiculaires sur les côtés DA et AB, $DA = a$, $RA = b$, $Dh = h$, $Hh' = h'$, $ABCD = SHA = x$ et $HI = y$; on doit avoir

$$(a + y)\, h' = S \ldots . (B).$$

Mais la proportion

$$R : x :: \sin. A : h'$$

donne $h' = \sin. A \cdot x$,

d'un autre côté on a

$$b : a :: RH\,(b - x) : y;$$

donc $y = \frac{(b - x)\, a}{b}$.

Substituant les valeurs de h' et y dans l'équation (B), on trouve celle-ci,

$$\left\{a + \frac{(b-x)a}{b}\right\}\text{sin. A}.x = \text{S},$$

de laquelle on tire

$$x = b \pm \sqrt{\left(b^2 - \frac{b}{a\,\text{sin. A}}\text{S}\right)}$$
$$= b \pm \sqrt{\left\{b\left(b - \frac{\text{S}}{h}\right)\right\}}$$

à cause de a sin. A $= h$.

On peut encore résoudre, et d'une maniere très facile, le même problême au moyen de la proportion suivante :

$$\overline{\text{RH}}^2 : \overline{\text{RA}}^2 :: \tfrac{1}{2}\text{S} + \text{B} : \text{S} + \text{B},$$

dans laquelle B désigne le triangle RBC. En effet cette proportion suppose 1°. que les triangles RIH et RDA sont semblables, ou que IH est parallele à AD; 2°. que la surface AHID est moitié de la surface ABCD.

Remarque.

La surface BRC = B se détermine aisément; car on connoît le côté BC, les

angles ABC, BCD, et conséquemment les suppléments CBR et BCR. Ayant trouvé RH, on soustraira sa valeur de RA; et portant le reste, à partir de A, sur le côté AB, on aura le point H. On trouvera de la même maniere la longueur DI.

PROBLÈME XI.

Diviser un quadrilatere en trois parties égales par des lignes paralleles à un des côtés.

Construction.

Fig. 24. Après avoir mené la diagonale DB, on lui tirera du point C une parallele CE; puis prenant $AF = \frac{1}{3} AE$, et prolongeant DC jusqu'à la rencontre du côté AB aussi prolongé, on cherchera une moyenne proportionnelle entre RA et RF, laquelle portée du point R sur la ligne RA donnera un point H tel que menant la ligne HI parallele à AD, on aura

$$AHID = \frac{1}{3} ABCD.$$

Reste ensuite à diviser le quadrilatere BHID en deux parties égales par une ligne parallele à un des côtés : c'est le sujet du probléme X.

Démonstration.

On prouvera, comme on l'a fait, probléme X, que BHIC = FDCB; et comme la construction donne ADF = $\frac{1}{3}$ ADE = $\frac{1}{3}$ ABCD, il résulte que FDCB = BHIC = $\frac{2}{3}$ ABCD; d'où l'on conclut ADIH = $\frac{1}{3}$ ABCD. En général, soit un quadrilatere à diviser en 4, 5, 6, etc. . . n parties égales; après avoir pris AF = $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, etc. . . . $\frac{1}{n}$ de AE, on cherchera entre AR et la distance de R à F une moyenen proportionnelle qui, portée sur RA, à compter du point R, donnera un point de division. Pour avoir ensuite un second point de division, on menera la diagonale du nouveau quadrilatere et du sommet C une ligne qui lui soit parallele, et faisant HL = $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc. . . $\frac{1}{n-1}$ de

HK, on cherchera entre RH et la distance RL une moyenne proportionnelle avec laquelle on déterminera le point de départ de la seconde ligne de division, et ainsi de suite.

Autre solution.

Idem. Désignant toujours par *S* et B les surfaces ABCD, BCR, on déterminera les lignes RH, RM, par les proportions

$$S+B : \tfrac{2}{3}S+B :: \overline{RA}^2 : \overline{RH}^2 = \overline{RA}^2 \times \frac{\tfrac{2}{3}S+B}{S+B},$$

$$S+B : \tfrac{1}{3}S+B :: \overline{RA}^2 : \overline{RM}^2 = \overline{RA}^2 \times \frac{\tfrac{1}{3}S+B}{S+B};$$

et en général, représentant par t, x, y, z, les distances du point R aux lignes de division et le nombre des portions par n, on a, pour trouver les valeurs de ces inconnues, les proportions

$$S+B : \frac{n-1}{n} S+B :: \overline{RA}^2 : t^2,$$

$$S+B : \frac{n-2}{n} S+B :: \overline{RA}^2 : x^2,$$

$$S+B : \frac{n-3}{n} S+B :: \overline{RA}^2 : y^2,$$

et

et $\quad S + B : \frac{1}{n} S + B :: \overline{RA}^2 : z^2$,

z désignant la distance du point R à la ligne de division la plus voisine de BC.

PROBLÈME XII.

Diviser un quadrilatere en trois parties égales par des lignes tirées d'un des angles.

Construction.

Après avoir tiré la diagonale DB et par le point C une parallele CE, on prendra AF = FG = GE; et joignant les points D et F, D et G, on aura ADF = FDG = BCDG. Fig. 25.

Démonstration.

Les lignes DB et CE étant paralleles, T. DBE = T. CDB, et T. DBE + T. DBA = T. CDB + T. DBA, ou T. ADE = ABCD; donc T. ADF = T. FDG = $\frac{1}{3}$ T. ADE = $\frac{1}{3}$ ABCD.

K

Remarque.

Cette construction ne peut avoir lieu que dans le cas particulier où les points F et G tombent sur la ligne AB.

Autre solution.

Fig. 26. Après avoir calculé les surfaces ABD, DBC, on cherchera le rapport $\frac{\text{T. ABD}}{\text{ABCD}}$; et s'il surpasse $\frac{2}{3}$, on en conclura que les deux lignes de division doivent être menées dans le triangle ADB; s'il est moindre que $\frac{1}{3}$, elles seront dans le triangle BDC; et enfin s'il tombe entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, l'une des deux lignes tombera dans un des triangles, et l'autre dans l'autre.

Soient T. ABD $=$ A, T. BDC $=$ C, BM $= x$, BM$' = x'$, et DH la hauteur du triangle ADB, on aura pour le premier cas

$$A - \frac{DH}{2}x = \tfrac{2}{3}(A + C),$$

$$\text{d'où} \quad x = \tfrac{1}{3}\left(\frac{A - 2C}{\frac{1}{2}DH}\right)$$

et $A - \frac{DH}{2} x' = \frac{1}{2}(A + C)$,

d'où $x' = \frac{1}{2}\left(\frac{2A - C}{\frac{1}{2}DH}\right)$.

Remarque.

Lorsqu'on a $C = 2A$, x' devient $= 0$, ce qui doit arriver, car alors DM′ se confond avec la diagonale DB; dans ce cas BM devient négatif; en effet cette ligne est toujours de même signe qu'une perpendiculaire MG abaissée du point M sur la diagonale DB; et DM tombant dans le triangle DBC, cette perpendiculaire change de signe. Lorsqu'on a $2C > A$ et $C < 2A$, x' est négatif, ce qui indique que la ligne DM doit tomber dans le triangle BDC.

PROBLÈME XIII.

Diviser un quadrilatere en trois parties égales par des lignes tirées d'un point E pris sur un des côtés.

Construction.

Fig. 27. Après avoir tiré par le point C une parallele CF à la diagonale DB, on prendra AG = $\frac{1}{3}$ AF, puis menant de l'angle D une parallele DH à la ligne EG, on tirera la ligne EH qui donnera le quadrilatere ADEH = $\frac{1}{3}$ ABCD. Reste donc à diviser BCEH en deux parties égales; pour cela, après avoir mené du sommet C une parallele CI à la diagonale EB, et fait HK = $\frac{1}{2}$ HI, on menera la ligne EK qui donnera T. HEK = KBCE.

Démonstration.

1°. T. DGH = T. DEH;

ajoutant de part et d'autre T. ADH, il vient

T. ADG = ADEH;

mais la construction donne

$$\text{T. DBF} = \text{T. DBC},$$

$$\text{et T. DBF} + \text{T. ADB} = \text{T. DBC} + \text{T. ADB},$$

$$\text{ou T. ADF} = \text{ABCD};$$

$$\text{donc T. ADG} = \tfrac{1}{3}\,\text{ABCD},$$

et conséquemment

$$\text{ADEH} = \tfrac{1}{3}\,\text{ABDC}.$$

$$2^{\circ}.\quad \text{T. EBC} = \text{T. EBI};$$

ajoutant T. EHB de part et d'autre, on trouve

$$\text{ECBH} = \text{T. HEI};$$

$$\text{donc T. HEK} = \tfrac{1}{2}\,\text{T. HEI} = \tfrac{1}{2}\,\text{HECB}.$$

Remarque.

On voit sans peine que cette construction n'est plus propre à donner les points H et K dans le cas où l'un de ces points ou tous les deux tombent sur les côtés DA et CB. Nous allons donner un moyen de les déterminer, quelle que soit leur position.

Autre solution.

Soient ABCD = D, ABCE = C, Fig. 28. T. ADE = A, EM une des lignes de di-

vision, EH une perpendiculaire sur le côté AB; quand A sera $< \frac{1}{3}$ D, la ligne EM tombera dans la surface C, et on aura pour déterminer AM $= x$ l'équation

$$A + \frac{EH}{2} x = \tfrac{1}{3}(A + C),$$

de laquelle on tire

$$x = \tfrac{1}{3}\left\{\frac{C - 2A}{\frac{1}{2}EH}\right\} \ldots (M).$$

Dans le cas de A $> \frac{1}{3}$ D, la ligne EM devient EM'; et faisant AM' $= x'$, on a

$$A - \frac{EH'}{2} x' = \tfrac{1}{3}(A + C),$$

d'où l'on tire

$$x' = \tfrac{1}{3}\left\{\frac{2A - C}{\frac{1}{2}EH'}\right\} \ldots (N).$$

Remarque.

Lorsqu'on a $\frac{C}{2} = A$, ou $C = 2A$, les équations (M) et (N) donnent $x = x' = o$; ce qui doit arriver, car alors la diagonale EA est elle-même la ligne de

division. Pour déterminer la position de la ligne EM″, on écrira dans l'équation (M) T. BEC et BADE à la place de T. EAD et ABCE.

PROBLÊME XIV.

Diviser un quadrilatere en trois parties égales par des lignes tirées du sommet des deux angles opposés.

Construction.

Soient D et B les angles desquels partent les lignes de division : après avoir tiré par le sommet C une parallele CE à la diagonale DB, on fera AF $= \frac{1}{3}$ AE ; et menant DF, on aura le triangle ADF $= \frac{1}{3}$ ABCD. Reste à partager le quadrilatere FBCD en deux parties égales par une ligne tirée de l'angle B ; pour cela, ayant d'abord prolongé la ligne FD jusqu'à la rencontre de EC aussi prolongée, on prendra FH $= \frac{1}{2}$ FG ; et tirant BH, on aura T. BFH $=$ BHDC. Fig. 29.

Démonstration.

1°. La construction donne

$$\text{T. ADF} = \tfrac{1}{3}\,\text{T. ADE};$$

mais $\text{T. DBC} = \text{T. DBE}$,

et $\text{T. DBC} + \text{T. ADB} = \text{T. DBE} + \text{T. ADB}$,

ou $\text{ABCD} = \text{T. ADE}$;

donc $\text{T. ADF} = \tfrac{1}{3}\,\text{T. ADE} = \tfrac{1}{3}\,\text{ABCD}$.

2°. $\text{T. FHB} = \tfrac{1}{2}\,\text{T. FGB}$;

et les lignes DB et GE étant paralleles,

$$\text{T. DCB} = \text{T. DGB},$$

et ajoutant T. FDB de part et d'autre, on a

$$\text{FBCD} = \text{T. FGB};$$

donc $\text{T. FHB} = \tfrac{1}{2}\,\text{T. FGB} = \tfrac{1}{2}\,\text{FDCB}$.

Fig. 50. Lorsqu'on aura DG > DF, le point H tombera entre les points D et G; et le nouveau triangle BHF, quoique toujours égal à la moitié de FBCD, ne sera plus celui qu'on cherche, puisque sa surface ne sera pas entièrement dans celle du quadrilatere: tout se réduit donc à faire une figure égale en surface à ce triangle, et qui de plus soit comprise dans le quadrilatere. On apperçoit aisément que le point H doit alors

tomber sur DC; voici la maniere de le déterminer; après avoir mené par le sommet F, parallèlement à DB, une ligne GE, terminée par les côtés CD et CB, on prendra CH $= \frac{1}{2}$ CG, puis tirant BH, on aura T. BHC $= \frac{1}{2}$ FBCD.

Autre solution.

Soient T. ADB $=$ B, ADCB $=$ A, et T. BDC $=$ C; lorsqu'on aura B $> \frac{1}{3}$ A, la ligne DF tombera dans la surface B, et AF $= x$ se déterminera par l'équation T. ADF $= \frac{1}{3}$ A. Reste donc à diviser FDCB en deux portions égales, et, pour cela, supposant C $< \frac{1}{3}$ A et désignant par x' la hauteur du triangle BHF, on aura $\frac{BF}{2} \cdot x' = \frac{1}{3}$ A. Fig. 29.

Dans le cas de C $> \frac{1}{3}$ A, BH tombe à gauche de la diagonale DB, et le point H se détermine d'une maniere analogue.

Remarque.

On peut demander que les lignes menées du sommet des deux angles opposés se coupent; alors HF, pour un grand nombre de cas, ne sera plus en ligne droite avec HD, et le problème s'é-

noncera comme il suit :

Du sommet de deux angles opposés mener deux lignes qui se rencontrent, et de leur intersection une autre ligne, en sorte que les trois surfaces résultantes soient égales entre elles.

Solution.

On calculera les surfaces DAB et DBC et leur rapport avec la surface totale : ceci fait, si la surface BAD surpasse le tiers de BADC, le point G sera à la droite de la diagonale, et, dans le cas contraire, ce point tombera dans la surface BDC; dans le premier cas, si la surface BAD est $> \frac{2}{3}$ BADC, la ligne GF sera à la droite de GB, et dans le 2[e], elle se trouvera toujours à sa gauche.

Fig. 51. Faisant donc T. DAB = B, T. BDC = A, les perpendiculaires $Gh = x$, et $G'h = x'$, et supposant DAB $> \frac{2}{3}$ BADC, on aura

$$B - \frac{DB}{2}x = \tfrac{2}{3}(B+A),$$ d'où l'on tire

$$x = \tfrac{1}{3}\left(\frac{B - 2A}{\frac{1}{2}DB}\right).$$

Lorsque le point G tombera dans le triangle DCB, on donnera le signe + au terme de x. Mais par les points

G et G′, ainsi déterminés, si on mene des paralleles MN et M′N′ à la diagonale, tous les triangles qui, ayant DB pour base, auront le sommet sur ces paralleles, seront égaux aux triangles DGB, DG′B. On voit donc que les points G sont en nombre infini et que leur lieu est une ligne droite; ainsi on pourra en prendre un à volonté pour point de départ de la 3me ligne de division, et abaissant de ce point une perpendiculaire GH qui donne le triangle BGH, que nous nommerons C, on aura, pour déterminer HF $= y$, l'équation

$$C \pm \frac{HG}{2} y = \frac{1}{3}(B + A):$$

on donnera le signe — au terme $\frac{HG}{2} y$, lorsque le triangle BGH surpassera le tiers de la surface ABCD. En prenant le signe supérieur, cette équation donne

$$y = \frac{2}{3}\left(\frac{B + A}{HG}\right) - \frac{2C}{HG} =$$

$$\frac{1}{3}\left\{\frac{DA \cdot AB \sin. A + DC \cdot CB \sin. C}{HG}\right\} - BH..(N).$$

Application à un quarré.

Fig. 52. C'est ici le cas de DAB < $\frac{2}{3}$ ABCD; ainsi on se servira de l'équation

$$B + \frac{DB}{2} x = \frac{2}{3}(B + A), \text{ qui donne}$$

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{2A - B}{\frac{1}{2}DB}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left\{\frac{2DA \cdot AB \sin. A - DC \cdot CB \sin. C}{DB}\right\},$$

laquelle faisant DA $= a$, devient

$$x = \frac{a^2}{3\sqrt{2a^2}} = \frac{a}{3\sqrt{2}}.$$

En effet on a DCBG' = T. DCB — T. DG'B $= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} \times \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} - \frac{a}{3\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^2 = \frac{1}{3}a^2$.
Reste à trouver la position de la ligne G'F qui doit partager DG'BA en deux parties égales : comme on est maître de la position du point G', on peut le prendre sur la diagonale CA, et alors la ligne G'F se confond avec GA, et le point F avec le point A; c'est ce qu'on trouvera en effet en déterminant H'F au moyen de

l'équation (N) qui, en substituant pour G'H' et BH' leurs valeurs $\frac{AG' \cdot CB}{AC} = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{2a^2} + \frac{a}{3\sqrt{2}}\right\} \times \frac{a}{\sqrt{2a^2}} = \frac{2}{3}a$ et $AB - AH' = a - \frac{2}{3}a = \frac{1}{3}a$, devient

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a^2}{\frac{2}{3}a} - \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a;$$

donc $y + BH' = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a = a$.

PROBLÊME XV.

Diviser un quadrilatere en deux parties qui soient entre elles dans la raison de AG à GH.

Construction.

Après avoir mené, des angles A et C, des perpendiculaires AF et CE sur la diagonale AB, et prolongé AF de FI = CE, on prendra AL égale au quatrieme terme de la proportion Fig. 53.

$$AH : AG :: AI : x,$$

et AM égale au quatrieme terme de celle-ci

$$AF : AL :: AB : x';$$

et menant DM, on aura

$$T.\ ADM : BCDM :: AG : GH.$$

Démonstration.

Les deux triangles ADM, BDM, ayant même hauteur, on a

T. ADM : T. BDM :: AM : BM,

et faisant le componendo,

T. ADM : T. ADB :: AM : AB :: AL : AF;

pareillement

T. ADB : T. CDB :: AF : CE :: AF : FI,

et faisant le componendo,

T. ADB : ABCD :: AF : AI.

Si à la place de T. ADB : AF on met T. ADM : AL, la derniere proportion deviendra

T. ADM : ABCD :: AL : AI,

et faisant ledetrahendo,

T. ADM : BCDM :: AL : LI :

mais la proportion

AH : AG :: AI : AL

donne après la même opération

GH : AG :: LI : AL;

donc T. ADM : BCDM :: AG : GH.

Autre solution.

Idem. Supposons que la raison des surfaces ADM, MBCD, soit celle de *m* à *n*; on

recherchera d'abord la valeur de $\frac{T.ADB}{T.BDC}$, et si elle surpasse celle de $\frac{m}{n}$, on en conclura que la ligne DM doit tomber dans la surface qui fait le numérateur : ce sera le contraire si la premiere valeur est plus petite que la seconde. Soient BM la ligne cherchée, et DH une perpendiculaire abaissée du point D sur le côté BA; faisant T. ADB = C, T. BDC = A, MB = x, on aura, pour le 1er cas,

$$C - \frac{DH}{2}x : A + \frac{DH}{2}x :: m : n$$

$$\text{et } nC - mA = \frac{n+m}{2} DH \cdot x,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{nC - mA}{\left(\frac{n+m}{2}\right) DH}$$

équation qui, substituant pour C et A leurs valeurs

$$\frac{DA \cdot AB \sin. A}{2}, \frac{DC \cdot CB \sin. C}{2},$$

devient

$$x = \frac{n\,\mathrm{DA}\cdot\mathrm{AB}\sin.\mathrm{A} - m\,\mathrm{DC}\cdot\mathrm{CB}\sin.\mathrm{C}}{(n+m)\,\mathrm{DH}}.$$

Application au quarré en supposant $\frac{m}{n} = 1$.

On voit que les deux termes qui forment le numérateur sont égaux entre eux; et comme ils sont de signe différent, leur somme $= o$, ce qui doit arriver.

Autre application en supposant $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$.

Soit le côté du quarré $= a$, on aura

$$x = \frac{4a^2 - a^2}{5a} = \frac{3}{5}a.$$

En effet

$$\mathrm{T.\,ADM} = \tfrac{2}{5}a\,\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{5}a^2,$$

et $\mathrm{T.\,DMB} + \mathrm{T.\,DBC} = \frac{3}{5}a \cdot \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a^2$
$= \frac{8}{10}a^2 = \frac{4}{5}a^2$;
donc $\mathrm{T.\,ADM} : \mathrm{MBCD} :: \frac{1}{5}a^2 : \frac{4}{5}a^2 :: 1 : 4$.

Remarque.

On voit qu'à l'aide de cette solution on peut d'un quadrilatere donné retrancher telle partie que l'on voudra. En effet, qu'on propose de retrancher d'un qua-

drilatere le tiers de ce quadrilatere; il est clair que le problême se réduit à diviser le quadrilatere en deux parties qui soient entre elles dans le rapport de 2 à 1, la surface 1 étant celle qu'on cherche. Cette solution donne encore le moyen de diviser un quadrilatere en un nombre quelconque de parties égales : en effet, qu'il faille partager un quadrilatere en quatre parties égales, on le divisera d'abord en deux parties qui seront entre elles dans le rapport de 1 à 3, puis la seconde en deux autres qui seront dans le rapport de 1 à 2; puis enfin on partagera cette derniere en deux parties égales.

PROBLÊME XVI.

D'un quadrilatere donné retrancher une figure quelconque.

Il y a deux manieres de résoudre ce problême; ou bien, après avoir réduit le quadrilatere en triangle, comme nous

l'avons fait plus haut, on en retranchera une portion égale à la figure donnée (voyez le chapitre premier), ou bien, calculant d'abord les surfaces du quadrilatere et de la figure à retrancher, et retranchant la deuxieme surface de la premiere, on partagera le quadrilatere en deux parties qui soient dans le rapport de ces surfaces (voyez le problême précédent).

CHAPITRE III.

De la division des polygones.

Diviser un polygone régulier en deux parties égales par une ligne tirée du milieu d'un des côtés.

Construction.

Si le polygone régulier a un nombre pair de côtés, la ligne de division devra être menée du point donné au milieu du côté opposé à celui duquel part la ligne; si au contraire le polygone a un nombre impair de côtés, la ligne de division ira aboutir au sommet de l'angle opposé. Tout ceci est trop clair pour exiger une démonstration.

PROBLÈME II.

Diviser un polygone régulier en deux parties égales par une ligne parallele à un des côtés.

1er cas; le nombre des côtés du polygone est pair comme dans l'exagone.

Construction.

Fig. 34. La division s'opérera en menant une ligne par les sommets F et C équidistants du côté ED auquel la ligne de division doit être parallele.

2me cas : le nombre des côtés du polygone est impair comme dans le pentagone.

Construction.

Fig. 35. Après avoir d'abord transformé par les procédés donnés dans tous les traités de géométrie le pentagone en un triangle FCH de même surface, on partagera la base FH en deux parties égales au point G, et tirant CG, on aura

$$\text{T. FCG} = \tfrac{1}{2}\,\text{T. ABCDE};$$

reste donc à mener une parallele NO à AB, en sorte qu'on ait

$$ABON = T.\ FCG:$$

pour cela soit tirée la diagonale CE, laquelle sera nécessairement parallele à AB, puisque le pentagone est régulier; et soit prolongé le côté CB jusqu'à la rencontre de la base en un point I; si on prend une moyenne proportionnelle entre IG et IE, et que du point I, comme centre, avec cette ligne pour rayon, on coupe la base IE, l'intersection donnera le point N cherché.

Démonstration.

Les triangles semblables ICE, ION, donnent la proportion

$$T.\ ICE : T.\ ION :: \overline{IE}^2 : \overline{IN}^2,$$

laquelle, par la substitution de IE $\times$ IG pour $\overline{IN}^2$, devient

$$T.\ ICE : T.\ ION :: \overline{IE}^2 : \overline{IN}^2 :: IE : IG.$$

Mais les triangles ICE, ICG, ayant même hauteur, on a

$$T.\ ICE : T.\ ICG :: IE : IG;$$

donc T. ION = T. ICG;

et retranchant de part et d'autre le triangle IBA, il reste

ABON = ABCG = $\frac{1}{2}$ ABCDE.

Remarque.

Nous ne résoudrons pas ce problême sur un polygone irrégulier, ni même sur un polygone régulier d'un plus grand nombre de côtés, parceque nous donnerons à la fin de ce chapitre une solution qui s'applique à une figure quelconque.

PROBLÊME III.

Diviser un polygone régulier en deux parties égales par deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre.

Fig. 36. 1er cas; le nombre des côtés du polygone est pair.

Construction.

Supposons que la surface à diviser soit celle d'un exagone; on menera d'abord la ligne FC, qui, comme on sait, divisera l'aire en deux parties égales; puis du point G, milieu de ED, au point H, milieu de AB, tirant GH, on formera les quatre portions égales cherchées.

Démonstration.

Le centre d'un cercle circonscrit à l'exagone donné se trouveroit sur le milieu de FC, c'est-à-dire à l'intersection des lignes GH et FC : or on démontre en géométrie qu'une ligne tirée du centre sur le milieu d'une corde est perpendiculaire sur cette corde; donc GH est aussi perpendiculaire sur FC qui est évidemment parallele à ED; de plus les deux portions GDCBH, HAFEG, sont symmétriques par rapport à GH; donc, etc.

2me cas; le nombre de côtés du polygone est impair.

Construction.

Supposons que la surface à diviser soit celle d'un pentagone : du sommet d'un des angles on menera une ligne sur le milieu du côté opposé, puis, par le procédé donné probl. II, on divisera la même surface par une ligne parallele à ce côté; la 1ere. ligne partagera l'aire en deux parties égales, la seconde la partagera en deux autres; donc, etc. Fig. 37.

PROBLÈME IV.

Diviser un polygone régulier en deux parties égales par une ligne tirée d'un point pris sur un des côtés au côté parallele.

1er cas; le nombre des côtés du polygone est pair, comme dans l'exagone ABCDEF.

Construction.

Fig. 38. Soit G le point donné : on prendra sur le côté AB parallele à ED la partie AH = DG, ou bien BH = EG, et la ligne GH divisera la surface donnée en deux parties égales.

Démonstration.

Soient menées les diagonales EA et DB; on a

T. EFA = T. DCB :

mais par la construction AH = GD et BH = EG, donc

T. AEH = T. GBD

et T. EHG = T. HGB.

2me cas. Le nombre des côtés du polygone est impair, comme dans le pentagone ABCDE.

Construction.

Après avoir transformé le pentagone proposé en un triangle FCG de même surface, on divisera FG en deux parties égales au point H; tirant alors la ligne HO et du point C une parallele CN à HO, la ligne menée du point O donné au point N ainsi déterminé divisera la surface du polygone en deux parties égales. Fig. 39.

Démonstration.

La construction donne

T. CNH = T. CON;

ajoutant de part et d'autre le triangle ACN, on trouve

T. ACH = ACON.

Mais la ligne BF est parallele à la diagonale CA, donc

T. CFA = T. CBA.

Ajoutant ces deux équations membre à membre, on obtient celle-ci,

T. FCH = ABCON;

L

donc la seconde surface ainsi déterminée est la moitié de celle du pentagone proposé.

Autre solution.

Fig. 40. Soient A la surface du pentagone, B celle du triangle ODE; on calculera d'abord B et A, et soustrayant B de $\frac{1}{2}$ A, on connoîtra la surface du triangle EON à ajouter. Pour en avoir la hauteur, on cherchera le quatrieme terme de la proportion suivante,

R : OE :: sin. OEA : OH = OE · sin. OEA.

Connoissant OH, la longueur EN sera donnée par l'équation

$$EN = \frac{\frac{1}{2}A - B}{\frac{1}{2}OH}.$$

Remarque.

Soit M le milieu du côté CD; le point O étant en M, le point N se confondra avec le sommet A; et O étant en C, le point N tombera sur le milieu de AE; ainsi pour tous les points O entre C et M, le point N sera entre A et $\frac{AE}{2}$. De même le

point O étant donné entre M et D, le point N se trouvera entre A et $\frac{1}{2}$ AB. Ainsi on connoîtra, *a priori*, la direction de la perpendiculaire OH et celui des côtés sur lequel doit tomber le point N.

PROBLÈME V.

Diviser le pentagone irrégulier ABCDE en trois parties égales par des lignes tirées du point O donné sur le côté CD.

Solution.

Après avoir transformé le pentagone donné en un triangle FCG de même surface, on prendra FH = $\frac{1}{3}$ FG; puis on menera la droite HO, et par le point C une parallele CN à HO, et la ligne ON ainsi déterminée donnera Fig. 41.

ABCON = $\frac{1}{3}$ ABCDE :

reste maintenant à diviser la surface NEDO en deux parties égales. *Voyez probl.* XII, *page* 217.

Nous renvoyons pour la démonstration aux problêmes précédents.

Autre solution.

Fig. 42. Faisant comme ci-dessus la surface du pentagone $= A$, celle du triangle $EOD = B$, on aura

$$T.\ EON + B = \tfrac{2}{3} A;$$

d'où $T.\ EON = \tfrac{2}{3} A - B$,

$$\text{et } EN = \frac{\tfrac{2}{3} A - B}{\tfrac{1}{2} OH}.$$

Le point M sera donné par l'équation suivante

$$EM = \frac{\tfrac{1}{3} A - B}{\tfrac{1}{2} OH}.$$

Remarque.

On pourra découvrir, *a priori*, sur lequel des deux côtés AE ou AB doit se trouver le point N, en calculant la surface ABCOA et la comparant avec $\tfrac{1}{3} A$; car si la premiere surpasse la seconde, ce sera une preuve que le point N doit tomber sur AB; et faisant $T.\ COB = D$,

$$\text{on aura } D + BN' \cdot \frac{OH'}{2} = \tfrac{1}{3} A,$$

d'où

$$BN' = \frac{\tfrac{1}{3} A - D}{\tfrac{1}{2} OH'}.$$

Problème VI.

Diviser la surf. du pentagone ABCDE en trois portions égales par des lignes tirées de l'angle D.

Construction.

Après avoir transformé le pentagone ABCDE en un triangle FDG de même surface, on partagera sa base FG en trois parties égales, aux points H et I; et menant les lignes DH et DI, on aura Fig. 43.

AEDH = T. HDI = IDCB.

Démonstration.

On a

T. HDI = $\frac{1}{3}$T. FDG = $\frac{1}{3}$ ABCDE;

et nous avons démontré plus haut que AEDH = T. FDH, et IBCD = T. GDI. Donc, etc.

Autre solution.

Soient ADE = A, ABCD = C, ABCDE = D, DM une perpendiculaire abaissée du point D sur le côté AB; lorsque A *Idem.*

sera moindre que le tiers de D, la ligne DH tombera à la droite de AD, et on aura, pour déterminer AH $= x$, l'équation

$$A + \frac{DM}{2} \cdot x = \tfrac{1}{3}(A+C),$$

de laquelle on tire

$$x = \tfrac{1}{3}\left(\frac{C - 2A}{\frac{1}{2}DM}\right).$$

Soit AI $= x'$; on aura l'équation

$$A + \frac{DM}{2} \cdot x' = \tfrac{2}{3}(A + C),$$

laquelle donne

$$x' = \tfrac{1}{3}\left(\frac{2C - A}{\frac{1}{2}DM}\right).$$

Remarque.

Il est inutile d'analyser encore les différents cas dans lesquels les lignes DH et DI doivent tomber à gauche et à droite des diagonales DA et DB; nous renvoyons là-dessus aux caracteres donnés dans les problêmes précédents.

PROBLÈME VII.

Diviser la surf. du pentagone ABCDE en trois portions égales par des lignes tirées des points O et P donnés sur le côté CD.

Construction.

1°. Après avoir transformé le pentagone ABCDE en un triangle FDG de même surface, on prendra FH = $\frac{1}{3}$ FG, et tirant HO et par le point D une parallele DI, on aura Fig. 44

AEDOI = $\frac{1}{3}$ ABCDE.

2°. On transformera le quadrilatere IBCO en un triangle IOL de même surface, puis, prenant IM = $\frac{1}{2}$ IL, on menera ON parallele à PM, et on aura

NBCP = $\frac{1}{3}$ ABCDE.

Nous croyons devoir omettre la démonstration parcequ'elle se compose de deux autres déja répétées plusieurs fois.

Autre solution.

Des points donnés O et P soient abaissées des perpendiculaires OH et PH′ sur Fig. 45.

le côté AB; faisant AEDO = A, BCP = B, ABCO = C, ABPDE = D, on aura, pour déterminer AI = x et BN = x', les équations

$$A + \frac{AH}{2} \cdot x = \tfrac{1}{3}(A + C),$$

$$B + \frac{PH'}{2} \cdot x' = \tfrac{1}{3}(B + D).$$

On tire de la premiere

$$x = \tfrac{1}{3}\left(\frac{C - 2A}{\tfrac{1}{2}AH}\right);$$

et de la seconde

$$x' = \tfrac{1}{3}\left(\frac{D - 2B}{\tfrac{1}{2}AH'}\right).$$

PROBLÊME VIII.

Diviser la surf. du pentagone ABCDE en deux portions qui soient entre elles dans la raison de deux lignes AI et IL, avec cette condition que la ligne de division parte du sommet d'un des angles.

Construction.

Fig. 46. Après avoir transformé le pentagone en un triangle FGD de même surface, on

divisera la base FG en un point M, ensorte qu'on ait

$$AI : IL :: FM : MG ;$$

puis, tirant DM, on aura

$$AEDM : MDCB :: AI : IL.$$

Démonstration.

Il est évident qu'on a
T. FDM : T. GDM :: FM : MG :: AI : IL;
mais
AEDM = T. FDM et BCDM = T. GDM;
donc, etc.

Autre solution.

Soient T. AED = A, ABCD = C, et *Idem.*
ABCDE = E; DH étant perpendiculaire sur le côté AB, on aura, pour déterminer AM = x, l'équation

$$A + \frac{DH}{2.} x : A + C :: AI : AL,$$

de laquelle on tire

$$x = \frac{A+C}{\frac{1}{2}DH} \cdot \frac{AI}{AL} - \frac{A}{\frac{1}{2}DH} \; \ldots . (M).$$

Supposons $\frac{AI}{AL} = \frac{1}{3}$, l'équation (M) se changera en celle-ci,

$$x = \frac{\frac{1}{3}(A + C)}{\frac{1}{2}DH} - \frac{A}{\frac{1}{2}DH} = \frac{1}{3}\left\{\frac{C - 2A}{\frac{1}{2}DH}\right\},$$

qui est celle trouvée plus haut.

Application à un pentagone régulier, en supposant $\frac{AI}{AL} = \frac{1}{2}$. On a pour ce cas,

$$T.\ AED = T.\ BCD = A;$$

et faisant T. ADB = B,

$$C = B + A:$$

ces valeurs substituées dans l'équation (M) donnent, toute réduction faite,

$$x = \frac{B}{DH} = \frac{1}{2}AB'$$

comme cela doit être.

PROBLÈME IX.

Diviser un polygone quelconque en un certain nombre de parties égales par des lignes paralleles à un des côtés du périmetre.

Construction.

Fig. 47. Soit le polygone ABCDEGF = A à diviser en quatre parties égales par des lignes

paralleles au côté AB; on tirera une ligne G′ K′, en sorte que la surface résultante ABG′K′ paroisse $= \frac{1}{4}$ A, puis, calculant ABG′K′ = B′, on connoîtra le rapport de cette surface à la surface entiere. Supposons que la construction ait donné

$$B' < \tfrac{1}{4} A,$$

il faudra ajouter à B′ une petite surface G′GKK′. Soit LH′ la hauteur du trapeze B′; le probléme se réduit donc à trouver sur le prolongement de LH′ le point H par lequel doit passer la ligne GK; on a pour cela la proportion

$$B' : \tfrac{1}{4} A :: (AB + G'K') LH' : (AB + GK) LH.$$

Mais lorsque B′ differe très peu de $\frac{1}{4}$ A, G′K′ est sensiblement égal à GK (*), les deux termes du dernier rapport ont un facteur commun, et la proportion devient

$$B' : \tfrac{1}{4} A :: LH' : LH;$$

d'où l'on tire $LH = LH' \times \frac{A}{4B'}$;

(*) La différence entre G′K′ et GK, pour une même hauteur H′H, dépend des angles B et A; et cette différence devient d'autant plus grande que ces angles sont plus obtus.

équation dans laquelle B′ et A ont été calculés et la hauteur LH′ mesurée sur l'échelle du plan. Le calcul seroit absolument le même dans le cas de $B' > \frac{1}{4}$ A.

Remarque.

La méthode que nous venons d'exposer suppose que les surfaces partielles soient des trapezes, ce qui n'a plus lieu dans la surface KGFMNC $= \frac{1}{4}$ A. Dans ce dernier cas, on commencera par calculer la surface FFN′M′ = D et celle ABCFF dont la différence avec $\frac{1}{2}$ A donnera FFNM = E; puis, pour corriger la surface GKCFN′M′F, supposée plus grande que $\frac{1}{4}$ A, on fera la proportion

$$D : E :: H''H^{IV} : H''H^{III};$$

d'où l'on tire

$$H''H^{III} = H''H^{IV} \cdot \frac{E}{D}.$$

Remarque générale.

Nous croyons qu'il suffira des problêmes résolus dans ce chapitre pour mettre l'arpenteur en état de traiter tous ceux

auxquels la division des champs donne lieu : quoique la méthode dont nous nous sommes servie dans ce chapitre ne soit au fond qu'un tâtonnement, néanmoins elle est d'une commodité qui la rend préférable à la méthode rigoureuse, qui même exigeroit qu'on fît, *a posteriori*, sur les valeurs des inconnues les raisonnements que nous faisons ici avant de mettre en équation. Dans les deux derniers chapitres on a souvent à calculer des surfaces de polygones; nous allons donner un moyen simple de faire ces opérations, qui sauvera la nécessité de décomposer ces surfaces en triangles.

Théorème général.

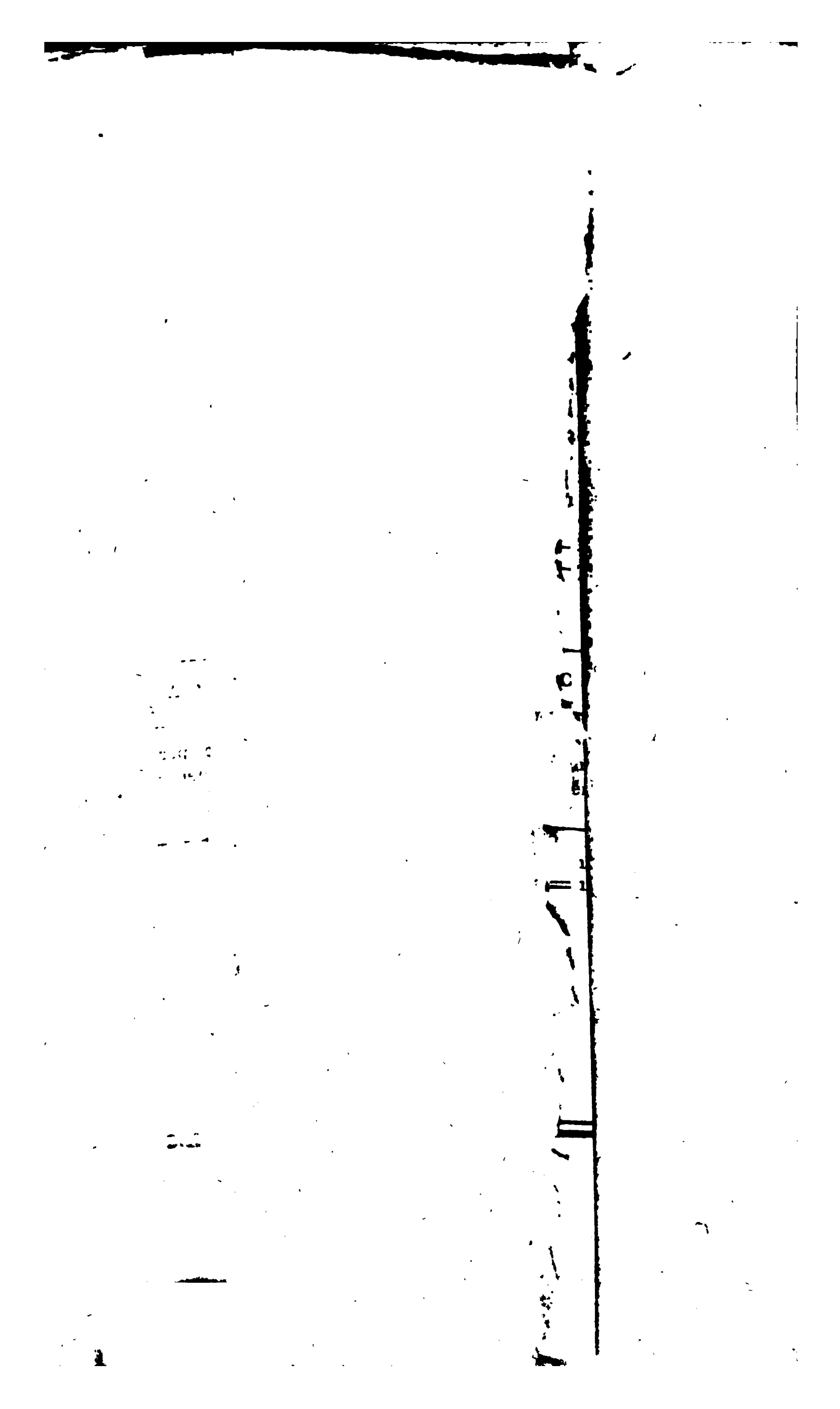
Si du sommet des angles d'un polygone on mene des perpendiculaires sur un axe quelconque SN, pris à volonté, on aura, en désignant la surface par S,

Fig. 48. $2S = (Dd + Ee)\,de + (Ee + Ff)\,ef + (Ff + Aa)\,fa - \{(Aa + Bb)\,ab + (Bb + Cc)\,bc + (Cc + Dd)\,cd\} \ldots (A),$

Fig. 49. $2S = (Cc + Dd)\,cd + (Dd + Ee)\,de + (Ee + Ff)\,ef + (Gg + Aa)\,ag, - \{(Aa + Bb)\,ab + (Bb + Cc)\,bc + (Ff + Gg)\,fg\} \ldots (B).$

Démonstration.

Les produits positifs donnent le double des espaces $DdeE$, $EefF$ et $FfaA$, et conséquemment leur somme représente le double de la surface $aAFEDd$; les produits négatifs donnent le double des aires $ABba$, $BCcb$ et $cCDd$, donc la somme



vaut le double de l'aire totale ABCD; d'où il suit que la différence entre ces deux sommes sera $= 2$ S. On démontrera de la même maniere que la 2ᵉ équation a lieu.

Application.

Soit NS un axe dont la direction fasse avec CD, prolongé vers N, un angle quelconque connu; ayant mesuré la longueur de ce prolongement, on aura un triangle dans lequel on connoîtra deux angles et un côté : on pourra donc calculer la perpendiculaire Co; ensuite le triangle rectangle CDo', dans lequel on connoît l'angle CDc', complément de l'inclinaison de l'axe sur le côté CD, et ce côté donnera C$c' = cd$ et Dc', qui, ajouté à Cc, fera la perpendiculaire Cd. Retranchant l'angle CDc' de l'angle D du polygone qu'on a observé, on aura dans le triangle rectangle e'DE tout ce qu'il faut pour calculer Ee' = De et De', qu'on retranchera de Dd pour avoir Ee, et ainsi de suite. Quant à la distance Aa, on la trouvera au moyen de Bb, ou par le Fig. 49.

procédé employé pour Cc (*). Ceci fait, on calculera l'équation (B) comme on le voit dans le tableau suivant.

Retranchant la somme des produits positifs de celle des négatifs, on aura

$$2\,S = 1034^{\text{rr}},6037,$$
$$\text{et } S = 517^{\text{rr}},3018.$$

On voit dans la 2e colonne de ce tableau des nombres renfermés dans une même accolade avec des projections de côtés : ils expriment les longueurs des perpendiculaires mesurées ou calculées précédemment ; ces perpendiculaires et la projection prises avec les signes qu'elles ont forment la 3e colonne.

Nous croyons ne pouvoir mieux terminer cet ouvrage que par l'annonce suivante : le système métrique républicain ayant nécessité une nouvelle division du cercle, la section géométrique du cadastre s'occupe, en ce moment, de la tâche longue et pénible de calculer des tables

(*) On simplifiera le calcul en menant l'axe par le sommet d'un angle, par ceux de deux angles, ou perpendiculairement à un des côtés.

trigonométriques en nombres naturels et en logarithmes, rapportées à la division décimale du cercle. Les 1res renfermeront tous les sinus et cosinus pour chaque 10 000me partie du quart de cercle, poussés jusqu'à 20 décimales exactes; et les secondes donneront, pour chaque cent-millieme, les og arithmes des sinus, cosinus et tangentes, avec 10 caracteres (*). Ce travail, de la difficulté duquel on se fait difficilement une idée lorsqu'on ne le connoît pas, sera un monument précieux et utile pour toutes les sciences de calcul applicables à l'astronomie, la géographie, la géodésie, la navigation, etc. etc.

(*) Désignant par Q le quart de cercle, et faisant $\frac{Q}{10\,000} = d$, et $\frac{Q}{100\,000} = d'$, on aura, en réduisant Q en secondes,

$$d = \frac{324\,000''}{10\,000} = 32'',4, \text{ et } d' = \frac{324\,000''}{100\,000} = 3'',24:$$

donc nos dix-milliemes équivaudront à 32″, 4, et nos cent-milliemes à 3″, 24; mais on sous-divise les d' dans l'espace des 6000 premiers cent-milliemes.

TABLE
DES MATIERES
CONTENUES
DANS LA PREMIERE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

Trouver

M

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

Fin de la table des matieres de la premiere partie.

SECONDE PARTIE.

TRAITÉ DE LA DIVISION DES CHAMPS.

CHAPITRE PREMIER.

De la division des triangles.

CHAPITRE II.

De la division des quadrilateres.

CHAPITRE III.

De la division des polygones.

Fin de la table des matieres de la seconde partie.

Observations sur la longueur du metre.

On trouve (page 9) la longueur du metre $= 36^{po}\ 11^{lig},48$, tandis que dans le tableau du nouveau systême des poids et mesures cette longueur n'est que de $36^{po}\ 11^{lig},44$. Voici les raisons de cette différence : la détermination de la longueur du metre dépend 1° de la longueur absolue des parties du méridien qui ont été mesurées, 2° de la courbure du méridien. Il paroît indispensable d'adopter la courbure elliptique, et l'indétermination sur la courbure ne porte alors que sur le rapport des axes.

Les rapports qui ont principalement fixé l'attention des astronomes sont :

$$\frac{229}{230}, \quad \frac{299}{300}, \quad \frac{319}{320}.$$

Après avoir adopté une des ellipticités précédentes, il faut faire un choix dans les mesures absolues qui servent de module. Si on prend, en général, les mesures de degrés faites depuis l'équateur

jusqu'au pole, on trouvera, pour une quelconque des hypotheses d'ellipticité, des résultats si peu concordants qu'on ne pourroit pas en tirer un résultat moyen sur lequel on pût compter; les causes de cette irrégularité doivent être attribuées en partie à l'imperfection de quelques-unes de ces mesures.

Il est donc nécessaire de prendre une suite de degrés mesurés à la suite l'un de l'autre avec une précision dont on soit assuré, et qui embrassent un arc considérable du méridien. Les degrés mesurés en France depuis 1738 jusqu'en 1740 jouissent de cet avantage, et ont en outre celui d'être voisins du 45eme degré.

Prony, dans l'introduction qu'il a faite à sa traduction des mémoires sur les dernieres opérations trigonométriques anglaises, a discuté ces mesures, par une méthode particuliere, et il en résulte que la longueur du metre, dans l'hypothese de l'excentricité donnée par Newton, est de 36 pouces 11 lignes 43 à 44 cen-

tiemes de ligne; et en effet la longueur du metre a été fixée à 36^{po} 11^{lig}, 44. (1)

Les autres hypotheses d'excentricité donnent 5 à 6 centiemes de ligne de plus que celle de Newton : mais, indépendamment du grand nom de son auteur, cette hypothese, combattue par quelques astronomes, a encore pour défenseurs des hommes du plus grand mérite; en sorte qu'il n'auroit pas été possible de faire, *a priori*, un choix sur lequel on eût des probabilités plus décisives.

Au surplus cette matiere est discutée à fond, sous tous les rapports, dans l'ouvrage de Prony cité ci-dessus.

(1) C'est cette valeur du metre que j'ai prise pour base des quatre tableaux qui se trouvent à la fin de l'ouvrage.

INSTRUCTION

SUR L'USAGE DES TABLES Ire, IIe et IIIe.

Usage de la table 1re.

1° *Soient 234* T *5 pi. 6 po. 7 lig. 5, à réduire en metres et parties décimales du metre.*

Pour					on a
200 T					389 M, 6801
30					58, 4521
4					7, 7936
0	5 pied				1, 6237
0	0	6°			0, 1624
	0	0	7	lig.	0, 0158
0	0	0	0, 5		0, 0011
donc 234 T	5 pi.	6°	7 li. 5	=	457 M, 7294

2° *Soient 263, 45 metres à réduire en toises et parties décimales de la toise.*

Pour			on a
200 M.			102 T, 6487
60			30, 7944
3			1, 5397
0,	4		0, 2053
0,	05		0, 0257
donc 263 M,	45	=	135 T, 2132

Usage de la table IIe.

1° *Soient 34 TT 3 ppi. 6 ppo à réduire en metres quarrés et parties décimales du metre quarré.*

Pour			on a	
30 TT.			113 MM,	8886
4			15,	1851
0	3 ppi		0,	3164
0	0	6 ppo	0,	0044
donc 34 TT.	3 ppi	6 ppo	= 129 MM,	3942

Observation.

Cette table peut encore servir à trouver la valeur, en lignes quarrées, d'un nombre quelconque de toises quarrées, pieds quarrés, etc. car, pour cela, il ne faut que réduire, comme nous venons de le faire, les toises, pieds et pouces quarrés en metres quarrés, puis à l'aide de la table inférieure, évaluer ce nombre de metres quarrés en lignes quarrées.

2° *Soient 95 TT 2 Tp. 6 T o. 11 Tl. à réduire en metres quarrés et parties décimales du metre quarré.*

Au lieu de 2Tpi à réduire en metres quarrés, supposons qu'on n'ait que 1Tpi, ce qui donnera 1M, 9484033 à multiplier par 0, 3247333, et, à l'aide de la table premiere, qui donne tous les pro-

duits de 1^{m}, 9484033 par la suite des nombres naturels 1, 2, 3. . . 9 et 10, cette multiplication se fera très aisément. En effet, désignant le multiplicande par M, on a

9 M =	17535629[illegible]
3 M =	58452099
3 M =	58452099,
7 M =	136388231
4 M =	77936132
2 M =	38968066
3 M =	58452099.
1 Tpi =	0^{mq}, 6327126
2 Tpi =	1^{mq}, 2654253.

En effet, 1 Tpi = 6ppi = 0, 6327126 metres quarrés. On trouvera de la même maniere 6 Tpo = 0^{mq}, 3163566, et 11 Tli = 0^{mq}, 0483318. Réduisant donc 95 T. T. en metres quarrés, comme nous l'avons enseigné plus haut, en ajoutant les valeurs, en metres quarrés, de 2 Tpi 6 To 11 Tli, on aura

95 TT 2 Tpi 6 Tpo 11 Tli = 362, 27632 metres quarrés.

Usage de la table IIIe.

Soient 2324 arpents (à 22 pieds la perche) 13 perches quarrées à réduire en ares et parties décimales de l'are.

Pour		on a
2000 arp.		1020, 7764 ar.
300		153, 1164
20		10, 2078
4		2, 0416
	10 per. qu	0, 0510
	3	0, 0153
donc 2324 arp. 13 per. qu = 1186, 2085 ares		

On voit donc que toute transformation, à l'aide de ces tables, des anciennes mesures en nouvelles se réduit au changement de place d'une virgule et à une addition.

ERRATA.

Cet ouvrage ayant été imprimé au milieu des orages inséparables d'une aussi grande révolution, dans un temps sur-tout où la patrie en danger faisoit à chaque citoyen un devoir de s'occuper presque exclusivement de l'affaire générale, il n'est pas étonnant qu'on n'y trouve pas la correction si nécessaire dans un livre de mathématiques. Cependant si on a soin de corriger d'abord les fautes, d'après l'errata suivant fait avec le plus grand soin, cet inconvénient disparoîtra absolument, et tout le défectueux sera dans la composition, ce qui, jusqu'à un certain point, est encore l'effet des circonstances.

COMPAS DE PROPORTION.

Page 4, ligne 9, *c'ca*, lisez *c'ca'*.

5, ligne 12, *m'b*, lisez *m*B.

8, ligne 5, *marque*, lisez *marquée*.

12, ligne 21, AB, lisez A*m*.

18, ligne 4, *des n° n* et *m*, lisez *nn* et *mm*.

21, ligne 19, *le n°* 26, lisez *les n°s* 26.

34, ligne 12, $\frac{1}{25}$ *pouce*, lisez $\frac{1}{25}$ *de pouce*.

51, lignes 9, 10, 11 et 12, lisez, *il suit de*

là que si le n° correspondant à B *surpasse le double du n° correspondant à* D, *l'angle* A *sera obtus, et qu'il sera aigu si le contraire a lieu.*

Page 56, ligne 15, $n = 25$, lisez $n = 20$.

65, ligne 15, *soient* BAD, lisez *soient* BAC.

67, ligne 7, HG, lisez FG.

68, ligne 19, *coupe un cercle*, lisez *coupe le rayon d'un cercle.*

70, ligne 21, *quelconque n*, lisez *quelconque 2 n.*

72, ligne 14 *pieds*, lisez *pieds quarrés.*

Ibid., ligne 19, *isoscelle*, lisez *isocele.*

73, ligne 12, 3 *pi* 63, lisez 3,pi 63.

Ib. ligne 21, 5,pi 8634 × 42, 6 = 124, 88, lisez 5,pi 8634 $\overset{2}{\times}$ 42,pi 6 = 124.pi 88.

86, ligne 20, $\overline{AB}^3$ *à* $\overline{AC}^3$, lisez *m à n.*

87, ligne 7, AC = HI, lisez AD = HI.

Ibid, ligne 17, $\overline{FG}^2$ *à* $\overline{FI}^0$, lisez $\overline{FG}^3$ *à* $\overline{HI}^3$.

88, ligne 11, $\frac{AB}{AE} = \frac{\overline{AC}^3}{\overline{AD}^3}$, lisez $\frac{AB}{AE} = \frac{\overline{AD}^3}{\overline{AD}^3} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{AC}^3}$

Ibid., ligne 15, HI *sur la ligne*, lisez AE *sur la ligne.*

Ibid., ligne 17, *et le point* I, lisez *et le point* E.

Page 98, ligne 16, *des volumes*, lisez *de volume.*

100, ligne 5, *sphere d'étain*, lisez *sphere de même métal,*

101, ligne 14, *à la gauche du mot*, lisez *à la droite du mot.*

Ibid., ligne 15, *vers la droite*, lisez *vers la gauche.*

112 *fig.* 28, lisez *fig.* 28 (*bis*).

113, *fig.* 29, lisez *fig.* 29 (*bis*).

116, ligne 2, An et Bn', lisez An' et Bn.

132, ligne 19, AC = 40 *milles*, lisez AC = 40 *parties.*

142, ligne 8, *aux segments lorsque*, lisez *aux segments, lorsque.*

143, ligne 12, *avec* DE *comme centre*, lisez *avec* DE, *comme centre.*

Ibid. énoncé, *décrire une ellipse dont les diametres transverses et conjugués sont donnés*, lisez *décrire une ellipse sur des axes donnés.*

147, ligne 2, *vers la gauche*, lisez *vers la droite.*

154. Voyez Fig. 3 (bis), planche 1.

DIVISION DES CHAMPS.

Page 172, ligne 20, $:: \overline{BE}^2 \times EF : BE$, lisez $:: \overline{BE}^2 : EF. BE$.

173, ligne 6, *proportionnelle* AB, lisez *proportionnelle* BE.

174, ligne 9, $\frac{DC. BE}{DC}$, lisez $\frac{DC. BE}{BD}$

175, ligne 3, supprimez $\frac{1}{n}$ T. ABC.

Ibid., ligne derniere, $\frac{n-1}{n}$ BD, lisez $\frac{n-2}{n}$ BD.

176, vis-à-vis autre solution, lisez *fig. id.*

177, ligne premiere, $\frac{b}{2}x = \frac{a}{2}h$, lisez $\frac{b}{2}x = \frac{a}{4}h$, et finissez le calcul en conséquence.

Ibid., *fig.* 6, lisez *fig.* 6, *n°* 1.

179, ligne 6, T. AFC = T. CHF, lisez T. AFC = T. CHD.

Ibid., ligne 10, *de* EF, lisez *de* EF *et que* AB = AC.

182, ligne 11, $CH' = \frac{2}{sin.\ DBC} \times \frac{\frac{1}{3}A - B}{DC}$, lisez $CH' + \frac{2}{sin.\ DCB} \times \frac{\frac{1}{3}A - B}{DC}$

Page 182, supprimez les lignes 16, 17, 18, 19 et 20, et lisez en place, *substituant pour* D, A et B, *leurs valeurs, cette équation se change en celle-ci*,

CF. $Dh'' = \frac{2}{3}$ AC. Bh — AC. Dh', *de laquelle on tire* CF $=$ AC. $\left\{\frac{\frac{2}{3}Bh - Dh'}{Dh''}\right\}$.

185, ligne 5, HF″, lisez H′F″.

187, ligne 18, *sin.* C : FH′ ::, lisez *sin.* D : FH′ ::

Ibid, ligne derniere, FD $= \frac{EH'}{sin.\ C}$, lisez FD $= \frac{EH'}{sin.\ D}$

198, vis-à-vis autre solution, lisez *fig. id.*

203, ligne 15, *divisez le trapeze*, lisez *divisez le quadrilatere*.

Ibid., ligne 17, après *quatrieme proportionnelle*, lisez *à la somme des hauteurs, au côté qui renferme l'inconnue et à la hauteur de celui des quadrilateres qui contient la différence de ce côté à la ligne x.*

204, ligne 4, *le trapeze* ABCD, lisez *le quadrilatere* ABCD,

205, ligne 1, *le trapeze* ADCB, lisez *le quadrilatere* ADCB.

206 et 207, lisez par-tout *quadrilatere* au lieu de *trapeze*.

Page 208, ligne 10, *constriction*, lisez *construction*.

203, ligne 16, AR : RF :: $\overline{AR}^2 : \overline{RH}^2$, lisez $\overline{RH}^2 : \overline{AR}^2$ :: RF : AR.

212, ligne 5, EC : ED : $\overline{EF}^2$ :: lisez EC. ED : $\overline{EF}^2$ ::

Ibid., ligne 15, ABCD = SHA = x, lisez ABCD = S, $HA = x$.

Ibid., ligne 17, R : x ::, lisez 1 : x ::

219, supprimez les trois dernieres lignes.

225 et 226, ce feuillet est cartonné.

228, ligne 6, $\frac{1}{3}\left\{\frac{2DA.AB.\sin.A - DC.CB.\sin.C}{DB}\right\}$, lisez $\frac{1}{3}\left\{\frac{2DC.CB\sin.C - DA.AB\sin.A}{DB}\right\}$

234, ligne 8, *qui soient dans le rapport de ces surfaces*, lisez *qui soient entre elles comme la petite surface est à la différence.*

236, ligne derniere, $= \frac{1}{2}$T. ABCDE, lisez $= \frac{1}{2}$ ABCDE.

240, lignes 4 et 5, supprimez *au côté parallelè.*

248, ligne 5, $A + \frac{AH}{2} . x =$, lisez $A + \frac{OH}{2} x =$.

Page 248, ligne 8, $= \frac{1}{3}\left(\frac{C-2A}{\frac{1}{2}AH}\right)$, lisez $= \frac{1}{3}\left(\frac{C-2A}{\frac{1}{2}OH}\right)$.

Ibid., ligne 10, $= \frac{1}{3}\left(\frac{D-2B}{\frac{1}{2}AH'}\right)$, lisez $= \frac{1}{3}\left(\frac{D-2B}{\frac{1}{2}PH'}\right)$.

252, ligne 11, *et celle* ABCFF *dont*, lisez *et celle* ABCFF (*) *dont*; et en note, *la ligne* FF *est menée par le sommet* F *inférieur au sommet* C, *afin que les surfaces* FFNM *et* FFN'M' *soient des trapezes.*

255, 256, 257, et 258, feuillets cartonnés.

TABLES.

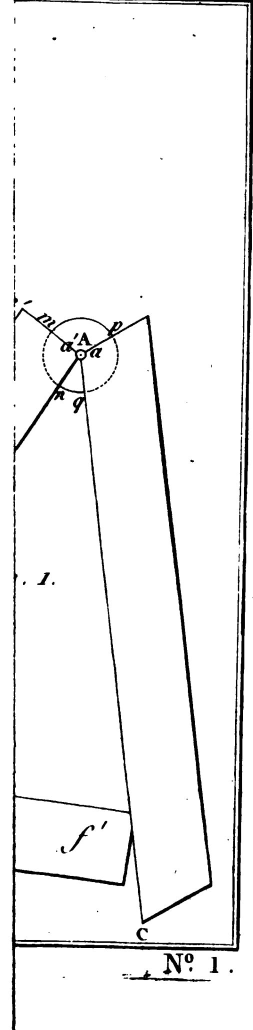
Table pour la page 255, colonne des produits positifs, *somme* = $1382^{\text{I}}, 7534$, lisez *somme* = $1382^{\text{II}}, 7534$.

Ibid., produits négatifs, *soé* = $348^{\text{I}}, 1497$, lisez *somme* = $348^{\text{II}}, 1497$.

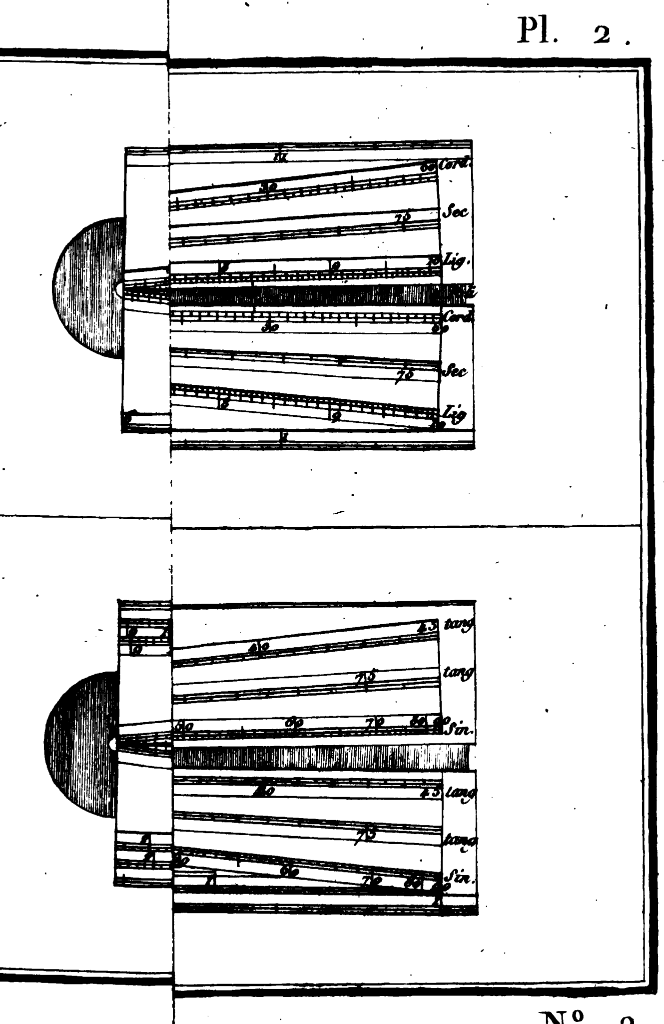
Tableau du nouveau système métrique, mesures de capacité,

pinte, lisez *cadil*, *par décret du* 30 *nivose.*

Fin de l'errata.

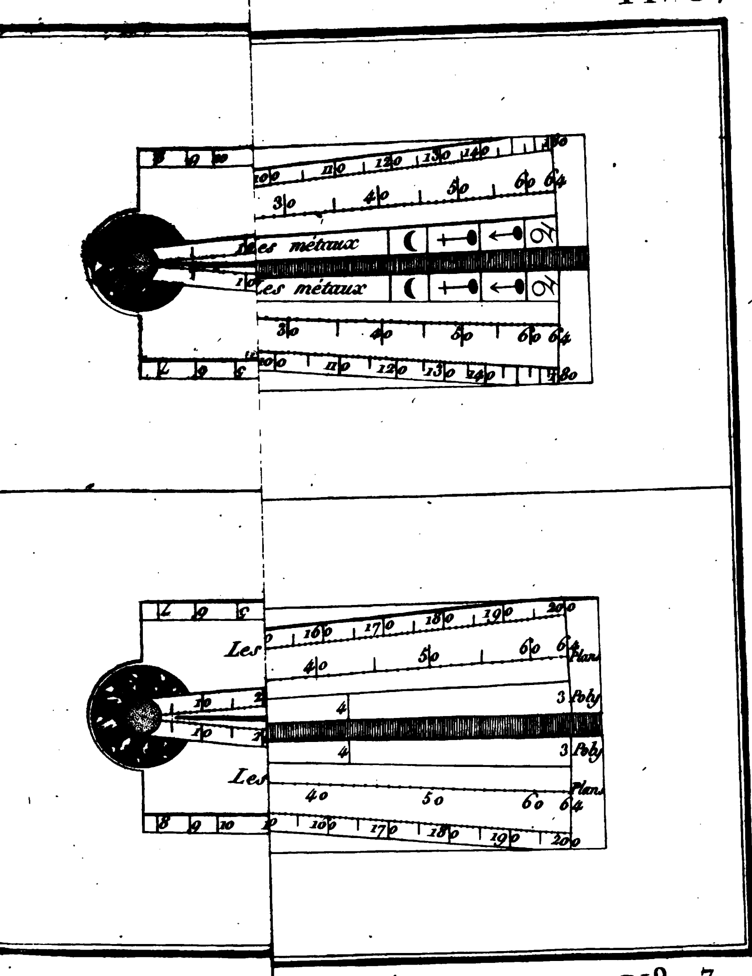

m
p
a'A
a
n
q
. 1.
f'
C

Pl. 2.

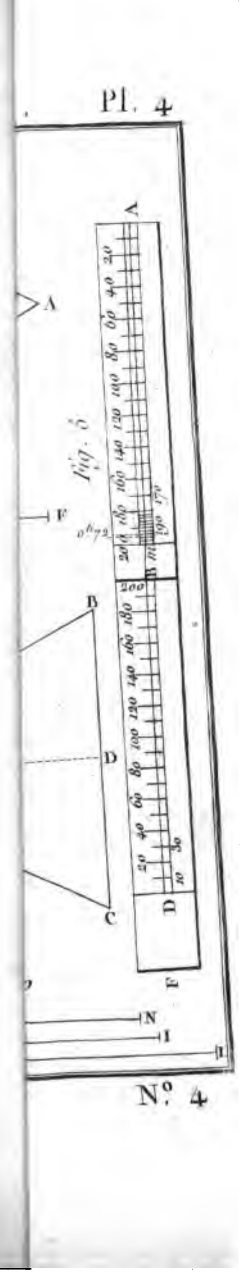


N°. 2.

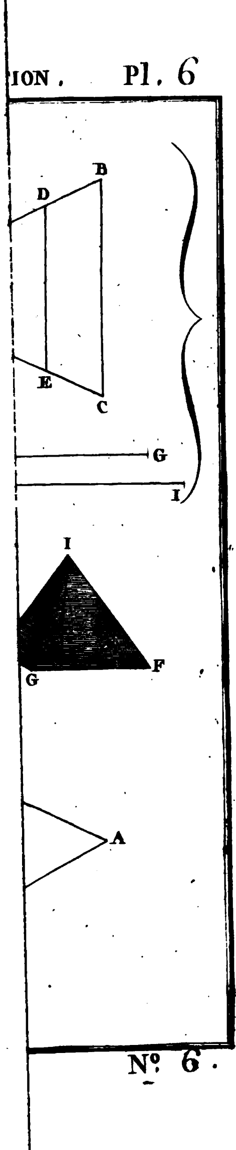
Pl. 3.

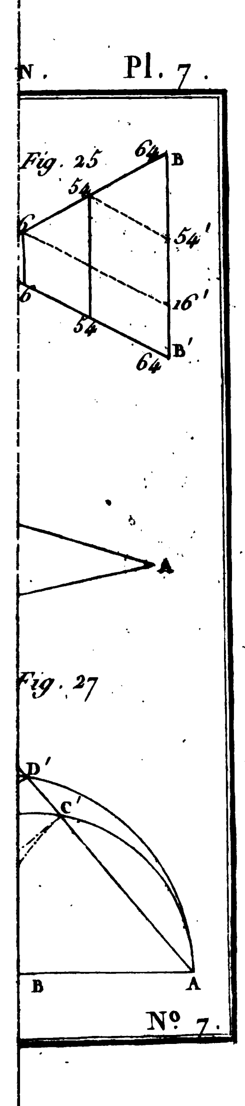


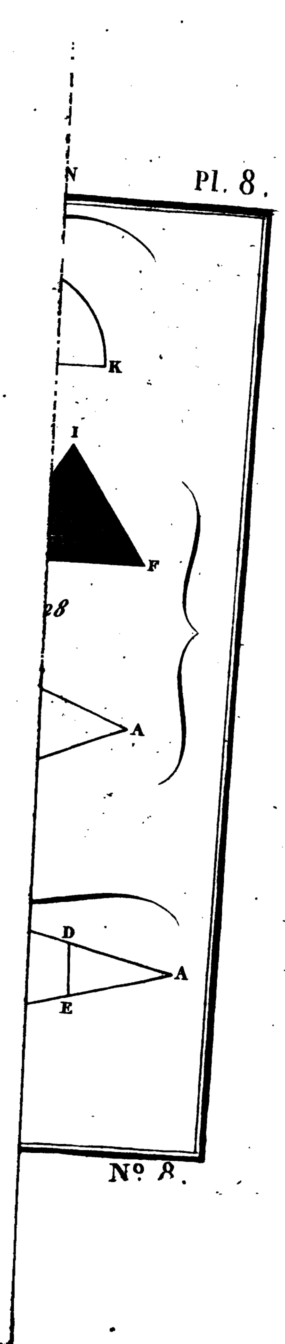
N°. 3.


A
F
B
D
C
N
I
Fig. 5

v
V
c
a
A
q
10 11 12
g. 14
8 9 10 11 12 13 14 15 16
B
Fig. 15
5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
B
g. 18
B
E
C
A
F
D


B
D
E
C
G
I
I
F
G
A


N.
Pl. 7.
Fig. 25
64
B
54
6
54'
16'
6
54
B'
64
A
Fig. 27
D'
C'
B
A
N°. 7.


N
Pl. 8.
K
I
F
28
A
D
A
E
Nº 8.

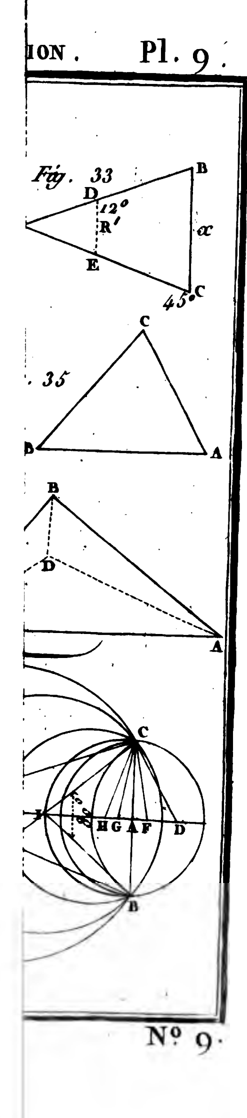


Fig. 33
D
12°
R'
E
B
x
C
45°
. 35
C
B
A
B
D
A
C
HGAF
D
B

Pl. 1ère

Fig. 1

2 1 B

1 A

1 2 3 4

Fig. 3

B

H

No. 1.

G

E H″ B

A

G

No. 2

E D B

N° 10

A h Fig. 8 D F B h'' h''' F

A H'' G F'' E F' L B h H H''

H M A f N B F

C , 13 b 5 a 3 2 1 A

Pl. 3

Fig. 16

F A E D

Fig. 18

I H D O G L F E A

Fig. 20

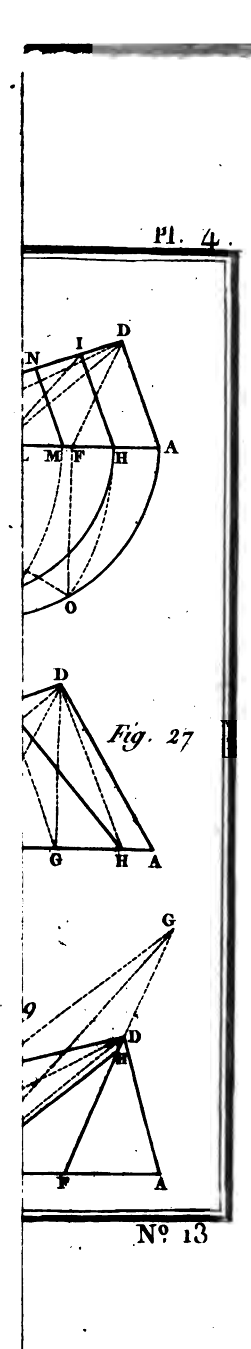
H D h G E A

D I h' F H h A

Fig. 22

No. 12

Pl. 4.



No. 13



Fig. 34

Fig. 40

C H′ B N′ N A

Fig. 44

E N H I A F

E A F

N
15,39 b′ c 31,21
18,20
d 24,56
B b 20,84
e 16,13
G a′ g 5,64
f 2,17
g′ 9,27 A 3,00 S a 0.0

…RES.	PERCHES QUARRÉES de 22 pds de long.
10	1959,2930
20	3918,5860
30	5877,8790
40	7837,1720
50	9796,4650
60	11755,7580
70	13715,9519

7	51,7767355
8	59,1734120
9	66,5700885
10	73,9667660

METRES cubes.	TOISES cubes.
1	0,1351958
2	0,2703916
3	0,4055874
4	0,5407832
5	0,6759790
6	0,8111748
7	0,9463706
8	1,0815664
9	1,2167622
10	1,3519585

…ES QUARR…
…o pds de lo…

…37,074
…74,148
…11,22…
…48,29…
…85,37…
…22,44…
…59,5…
…96,5…
…133,6…
…6168
…0699
…5210

…DS
…RÉS.

…8297…
…6595…
…4893…
…3191…
…1489…
…9786…
…8084…
…6638…
…3468…
…8297

onc arties déci

…RES.	PERCHES QUARRÉES de 22 pds de long.
10	1959,2930
20	3918,5860
30	5877,8790
40	7837,1720
50	9796,4650
60	11755,7580
70	13715,0510

7	51,7767355
8	59,1734120
9	66,5700885
10	73,9667660

METRES cubes.	TOISES cubes.
1	0,1351958
2	0,2703916
3	0,4055874
4	0,5407832
5	0,6759790
6	0,8111748
7	0,9463706
8	1,0815664
9	1,2167622
10	1,3519585

…HES QUARR…
…o pds de lo…

237,074
474,148
711,222
948,296
1185,37…
1422,44…
1659,51…
1896,5…
2133,6…

…6168
…0699
…5210

…D S
…RÉS.

…8297…
…6593…
…4893…
…3191…
…1489…
…9788…
…8084…
…6638…
…3468…
…8297